CULEGERI
DE
PROBLEME
DE
MATEMATICĂ
SI
FIZICĂ

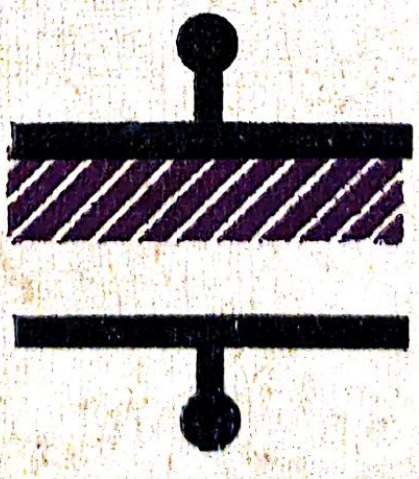
SERIE

MARIUS PREDA

PAUL CRISTEA

PROBLEME DE ELECTRICITATE

pentru examenele de bacalaureat și admitere în învățământul superior



Scanned with OKEN Scanner

Prof. dr. ing. MARIUS PREDA ★ Conf. dr. ing. PAUL CRISTEA

PROBLEME DE ELECTRICITATE

pentru examenele de bacalaureat
și admitere
în învățământul superior

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI — 1973

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea cuprinde probleme din domeniile electrostaticii, cîmpului magnetic, electromagnetismului, circuitelor electrice de curent continuu şi de curent alternativ, măsurărilor electrice, elementelor de electronică. Problemele sînt atît de factură oarecum clasică, cît şi moderne, propuse la ultimele concursuri. Ele sînt prezentate gradat: rezolvate, cu indicaţii de rezolvare şi doar cu răspunsuri. La începutul fiecărui capitol este dat un breviar cu relaţiile necesare.

Cartea face parte dintr-un ciclu de culegeri de probleme de fizică ce se adresează elevilor din ultimii ani ai liceelor, celor care se pregătesc pentru examenele de bacalaureat şi admitere în învăţămîntul superior, cum şi cadrelor didactice din învăţămîntul mediu şi asistenţilor universitari de specialitate. În cadrul acestui ciclu vor mai apărea:

I. Druică Zeletin, A. Popescu
Probleme de mecanică şi acustică
A. Hristev
Probleme de fizică moleculară, căldură şi termodinamică
I. M. Popescu, G. Ionescu, A. Iordache, V. Fochianu, M. Stan
Probleme de optică, fizică atomică şi nucleară

Control ştiinţific: prof. dr. **George Moisil**
Redactor: **Natalia Fiuciuc**
Tehnoredactor: **Valeriu Morăreseu**
Coperta: **Alexandru Banu**

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Această culegere de probleme este destinată elevilor, candidaților la concursurile de admitere în facultăți, celor care studiază electricitatea, magnetismul și circuitele electrice.

Conținutul lucrării este la nivelul programei de fizică a liceelor, conținînd în plus numai un număr foarte redus de lucruri simple, care ușurează înțelegerea temeinică a noțiunilor fundamentale existente în actualele manuale de liceu.

Lucrarea este astfel concepută încît studierea atentă a breviarelor teoretice și rezolvarea problemelor propuse să asigure în primul rînd clarificarea, sistematizarea și fixarea temeinică a cunoștințelor teoretice și, în al doilea rînd, formarea și dezvoltarea deprinderilor necesare rezolvării problemelor la nivelul cerut de actualele concursuri de admitere.

Un element important ce condiționează succesul profesional al unui absolvent de liceu îl constituie capacitatea sa de a utiliza eficient ansamblul cunoștințelor dobîndite în școală la rezolvarea problemelor ce le va întîlni în viitoarea sa activitate practică. Din acest motiv, o bună parte din problemele propuse au un grad de dificultate sporit, rezolvarea lor bazîndu-se pe totalitatea cunoștințelor de fizică și matematică din liceu, în concordanță cu actualele exigențe ale concursurilor de admitere în facultăți.

Capitolul 6 conține probleme date în ultimii ani la concursurile de admitere în învățămîntul superior.

Toate problemele au răspunsurile date în a doua parte a lucrării; cele notate cu R au pe lîngă răspunsuri și o rezolvare propusă de autori. Gradul de dificultate al problemelor este indicat prin numărul de asteriscuri alăturate numărului lor de ordine. Numărul figurilor este cel al problemelor la care se referă, chiar dacă uneori acestea nu au putut fi încadrate în textul corespunzător.

Autorii mulțumesc colegilor lor din Catedra de Electrotehnică a Institutului Politehnic din București pentru sugestiile primite și, de asemenea, mulțumesc anticipat tuturor colegilor și elevilor care le vor transmite observații și propuneri în legătură cu această lucrare.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

1. INTRODUCERE

În condiţiile progresului ştiinţific şi tehnic contemporan, cunoaşterea temeinică a fizicii devine tot mai necesară pentru cercuri din ce în ce mai largi de oameni angrenaţi în activitatea productivă.

Abordarea ştiinţifică a oricărui domeniu al fizicii necesită clarificarea unor concepte fundamentale, cum sînt: proprietăţile şi mărimile fizice, legile fizice şi teoremele derivate din acestea.

Studiul unor obiecte fizice pune în evidenţă existenţa unor *echivalenţe* (relaţii reflexive, simetrice şi tranzitive, de natură experimentală) între acestea, care reflectă existenţa unor *proprietăţi fizice*. Folosind procedee de măsurare adecvate, anumite proprietăţi fizice pot fi caracterizate cantitativ prin *mărmi fizice*. O mărime fizică M se exprimă ca produsul dintre valoarea numerică a mărimii V_M şi unitatea de măsură m:

$$M = V_M m \tag{1}$$

La alegerea unei noi unităţi de măsură m', valoarea mărimii M devine V'_M dată de relaţia

$$V'_M m' = V_M m \tag{2}$$

Practic, se face înlocuirea vechii unităţi cu numărul corespunzător de noi unităţi, de exemplu

$$l = 5 \text{ m} = 5 (100 \text{ cm}) = 500 \text{ cm}$$

Cele mai generale relaţii între mărimile fizice, constatate pe cale experimentală, se numesc *legi fizice*. Într-o teorie dată, legile fizice joacă rolul de axiome. Cele mai importante consecinţe deduse din

Scanned with OKEN Scanner

legi, pe cale logico-matematică, se numesc *teoreme* (fizice). Rezolvarea oricărei probleme de fizică se poate face pe baza sistemului de legi fizice din domeniul respectiv. De obicei, pentru a scurta raționamentele și calculele necesare, se utilizează teoremele și formulele deduse din legi, avînd o sferă mai restrînsă de valabilitate, care cuprinde însă cazul particular al problemei considerate.

Legile și relațiile de definiție ale unor mărimi (numite mărimi derivate) conduc la relații între unitățile de măsură ale diferitelor mărimi fizice. Aceste relații se mențin în toate teoremele și formulele deduse pe baza legilor. De aici decurge *omogenitatea dimensională* a fiecărei relații din fizică, care se reflectă în faptul că termenii relației, prin transformări adecvate, pot fi exprimați într-o aceeași unitate de măsură. Verificarea acestei omogenități constituie o metodă simplă și eficientă de testare a corectitudinii formulelor deduse prin calcul, la rezolvarea unei probleme. De exemplu, cunoscînd relațiile între unități $\mathrm{W} = \mathrm{V} \cdot \mathrm{A}$ și $\Omega = \mathrm{V/A}$, care rezultă din relațiile între mărimi $P = UI$ și $R = U/I$, se verifică omogenitatea formulei

$$P = \frac{U^2}{R},$$

prin

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{V}^2}{\Omega} = \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V/A}} = \mathrm{V} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{W}.$$

Rezolvarea sistematică a problemelor de fizică este condiționată de înțelegerea fenomenelor, de cunoașterea temeinică a legităților care descriu desfășurarea lor și a metodelor matematice prin care se deduc consecințe ale acestor legi. Din acest motiv, pregătirea corespunzătoare în domeniul fizicii necesită o strategie adecvată:

— studierea atentă a faptelor experimentale și înțelegerea calitativă a esenței acestora;

— înțelegerea și însușirea legilor care generalizează rezultatele experimentale;

— cunoașterea principalelor teoreme și a modului în care acestea se deduc din legi;

— rezolvarea unor probleme tipice care se referă la aspecte și aplicații importante ale fenomenelor studiate și care contribuie la fixarea selectivă a cunoștințelor teoretice;

— rezolvarea, pe cît posibil independentă, a unui număr mare de probleme diferite, care dezvoltă capacitatea de utilizare a cunoș-

Scanned with OKEN Scanner

tinţelor şi formarea unor deprinderi practice de analiză logică şi de calcul.

Obţinerea abilităţii de rezolvare sigură şi rapidă a problemelor este sensibil favorizată de aplicarea unei metodologii eficiente. Aceasta implică pe lîngă asimilarea cunoştinţelor teoretice fundamentale şi urmărirea unei anumite tactici în rezolvarea problemelor. Deşi o astfel de tactică depinde de o serie de factori, printre care experienţa şi aptitudinile celui care rezolvă problema, gradul de dificultate al acesteia, nivelul de pregătire matematică şi tehnica de calcul disponibilă, etapele principale parcurse în rezolvarea unei probleme se menţin aproape neschimbate şi pot fi redate schematic ca în organigrama din tabloul alăturat. O primă etapă o constituie citirea atentă a enunţului, analiza conţinutului acestuia şi realizarea, dacă este cazul, a unei schiţe a sistemului la care se referă problema, cu indicarea schematică a proceselor fizice corespunzătoare. În continuare este necesară o trecere în revistă a principalelor legi, teoreme şi formule care descriu fenomenele la care se referă problema şi selectarea relaţiilor ce sînt considerate necesare pentru rezolvarea acesteia. În cazul cînd se constată goluri în pregătirea teoretică, trebuie reluat studiul capitolului respectiv şi, eventual, utilizat breviarul pentru reamintirea anumitor relaţii. Urmează scrierea sistemului de ecuaţii ce descriu sistemul fizic studiat, aplicîndu-se relaţiile selectate anterior în formele particulare corespunzătoare condiţiilor din enunţ şi utilizîndu-se notaţiile impuse în acesta şi eventualele notaţii suplimentare adoptate. Se verifică completitudinea sistemului de ecuaţii obţinut şi compatibilitatea sa. În cazul cînd numărul de necunoscute este mai mare decît al ecuaţiilor, se caută să se completeze informaţiile din enunţ cu unele date din tabelele de constante fizice, astfel încît unii parametri ce intervin în ecuaţii să nu mai reprezinte necunoscute ale problemei. În cazul cînd procedeul anterior nu elimină dificultăţile, se caută să se completeze sistemul de ecuaţii cu alte relaţii din teorie, neutilizate anterior. Dacă nu se reuşeşte nici în acest mod şi nici după eventuale reluări, să se realizeze completitudinea şi compatibilitatea sistemului, se va apela la rezolvarea sau indicaţiile din partea a doua a lucrării. După obţinerea unui sistem complet de ecuaţii se trece la rezolvarea acestuia. În acest scop se imaginează de la început mai multe variante de calcul posibile, alegîndu-se pentru calculul efectiv varianta care se apreciază a fi mai uşor de realizat. Rezultatele obţinute se verifică atît prin repetarea directă a calculelor, cît şi prin utilizarea altor variante de rezolvare. De asemenea, se poate utiliza metoda înlocuirii valorilor obţinute pentru necunoscutele problemei în sistemul iniţial de ecuaţii. Uneori, pentru verificare este utilă rezolvarea aproxima-

Scanned with OKEN Scanner

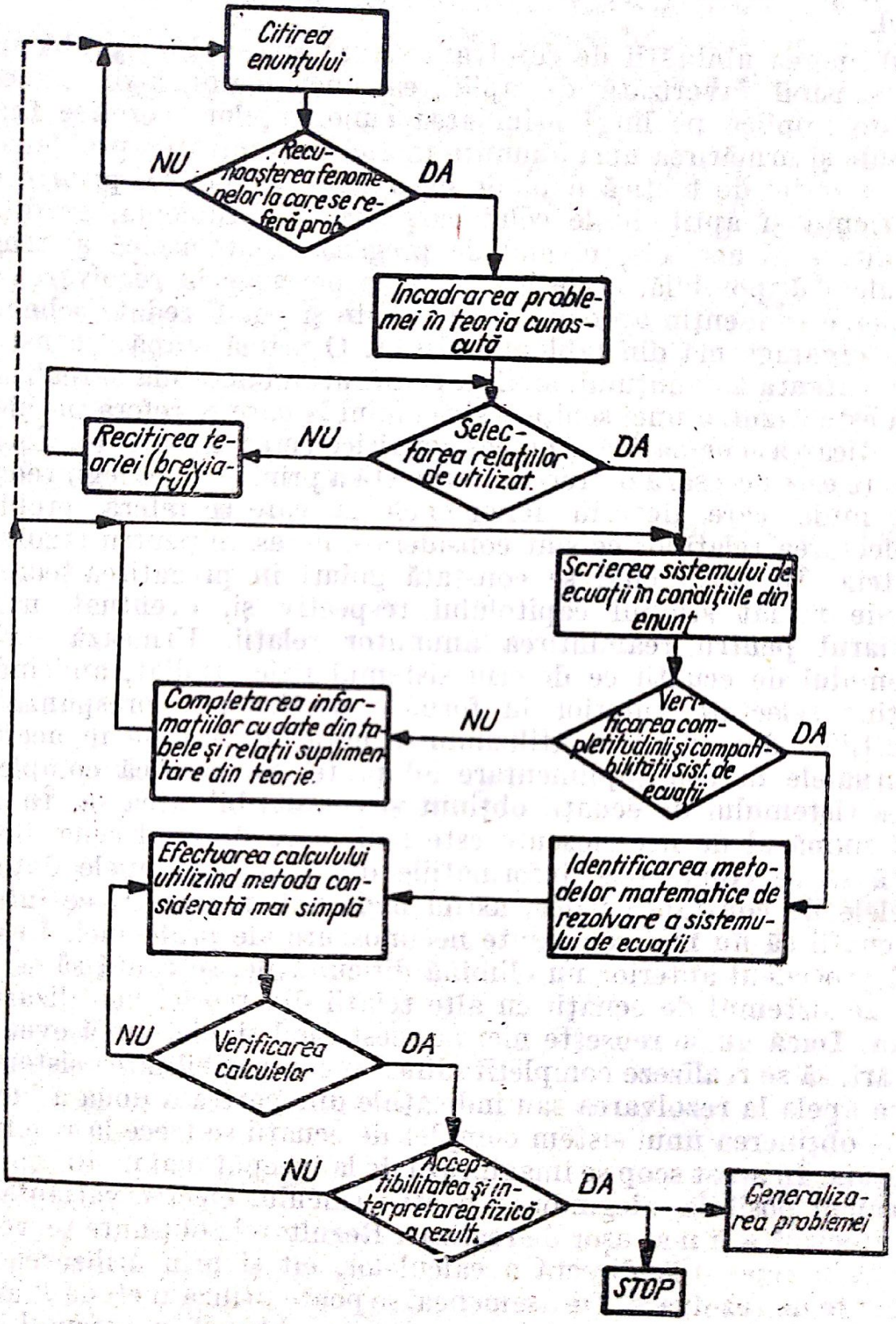

Citirea enunțului
Recunoașterea fenomenelor la care se referă prob.
NU
DA
Încadrarea problemei în teoria cunoscută
Selectarea relațiilor de utilizat.
NU
Recitirea teoriei (breviarul)
DA
Scrierea sistemului de ecuații în condițiile din enunț
Verificarea completitudinii și compatibilității sist. de ecuații
NU
Completarea informațiilor cu date din tabele și relații suplimentare din teorie.
DA
Identificarea metodelor matematice de rezolvare a sistemului de ecuații
Efectuarea calculului utilizînd metoda considerată mai simplă
Verificarea calculelor
NU
DA
Acceptabilitatea și interpretarea fizică a rezult.
NU
DA
Generalizarea problemei
STOP

Fig. A

tivă a acestuia, după operarea unor rotunjiri ale valorilor parametrilor şi a unor neglijări relativ grosiere, pentru a obţine valori orientative ale necunoscutelor. Urmează interpretarea fizică a rezultatelor şi aprecierea plauzibilităţii lor, ca ordin de mărime, ca semn al variabilelor, ca domeniu de apartenenţă etc. În cazul cînd toate aceste verificări au un rezultat pozitiv, problema poate fi socotită rezolvată şi se poate încerca, eventual, generalizarea ei sau stabilirea unor variante pentru condiţii modificate faţă de cele din enunţ. În cazul cînd rezultatele obţinute nu sînt acceptabile din punct de vedere fizic, este necesară reluarea problemei prin reanalizarea sistemului de ecuaţii utilizat şi, la nevoie, prin reconsiderarea atentă a enunţului.

Este de dorit ca întregul calcul să se efectueze sub formă literală, ceea ce uşurează mult interpretarea rezultatelor finale şi parţiale şi, totodată, permite verificarea omogenităţii fiecărei relaţii utilizate. Totuşi, pentru unele probleme (de exemplu, la rezolvarea circuitelor de curent continuu), relaţiile devin în acest mod prea complicate şi nu intervin simplificări pe parcurs, astfel încît este avantajos să se introducă datele numerice direct în sistemul de ecuaţii.

Înlocuirea valorilor numerice se face după exprimarea tuturor mărimilor în unităţile Sistemului internaţional (S.I.). Notarea unităţilor de măsură se face pentru fiecare rezultat numeric, final sau parţial. Nu se notează unităţile de măsură în relaţiile de calcul sau în sistemul de ecuaţii.

Se observă că drumul normal de rezolvare a unei probleme nu este liniar, ci cuprinde cicluri repetate de verificare pentru fiecare etapă, în scopul asigurării acurateţei deducţiilor, calculelor şi rezultatelor obţinute.

Urmărirea conştientă a unei tactici de rezolvare de tipul celei prezentate permite punerea în evidenţă a cauzelor unor eventuale eşecuri. În funcţie de etapa în care survin dificultăţile, se vor concentra eforturile în sensul aprofundării teoriei, al îmbunătăţirii pregătirii matematice sau al însuşirii deprinderii de a lucra metodic. În toate cazurile, condiţia esenţială a reuşitei rămîne voinţa şi perseverenţa, dorinţa de autoperfecţionare.

Scanned with OKEN Scanner

2. ELECTROSTATICA

BREVIAR

Legea lui Coulomb

Forța de respingere între două corpuri punctuale, încărcate

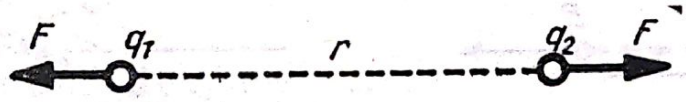


Fig. 1

electric, situate într-un mediu omogen și izotrop, infinit extins, este

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{1}$$

unde q_1 și q_2 sînt sarcinile electrice ale celor două corpuri, r — distanța dintre ele, ε — permitivitatea absolută a mediului,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r, \tag{2}$$

în care $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m este permitivitatea absolută a vidului, ε_r — permitivitatea relativă a mediului.

Intensitatea cîmpului electric

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \tag{3}$$

în care $\vec{F}$ este forța ce acționează asupra unui corp punctual avînd sarcina electrică q, plasat în cîmpul electric.

Scanned with OKEN Scanner

Intensitatea cîmpului electric al unui corp punctual avînd sarcina q, într-un punct M situat la distanța r față de acesta (fig. 2), rezultă

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (4)$$

Fig. 2

Tensiunea electrică. Potențialul electric

Într-un cîmp electric uniform, tensiunea de-a lungul unei linii de cîmp, între două puncte A și B (fig. 3, a), este :

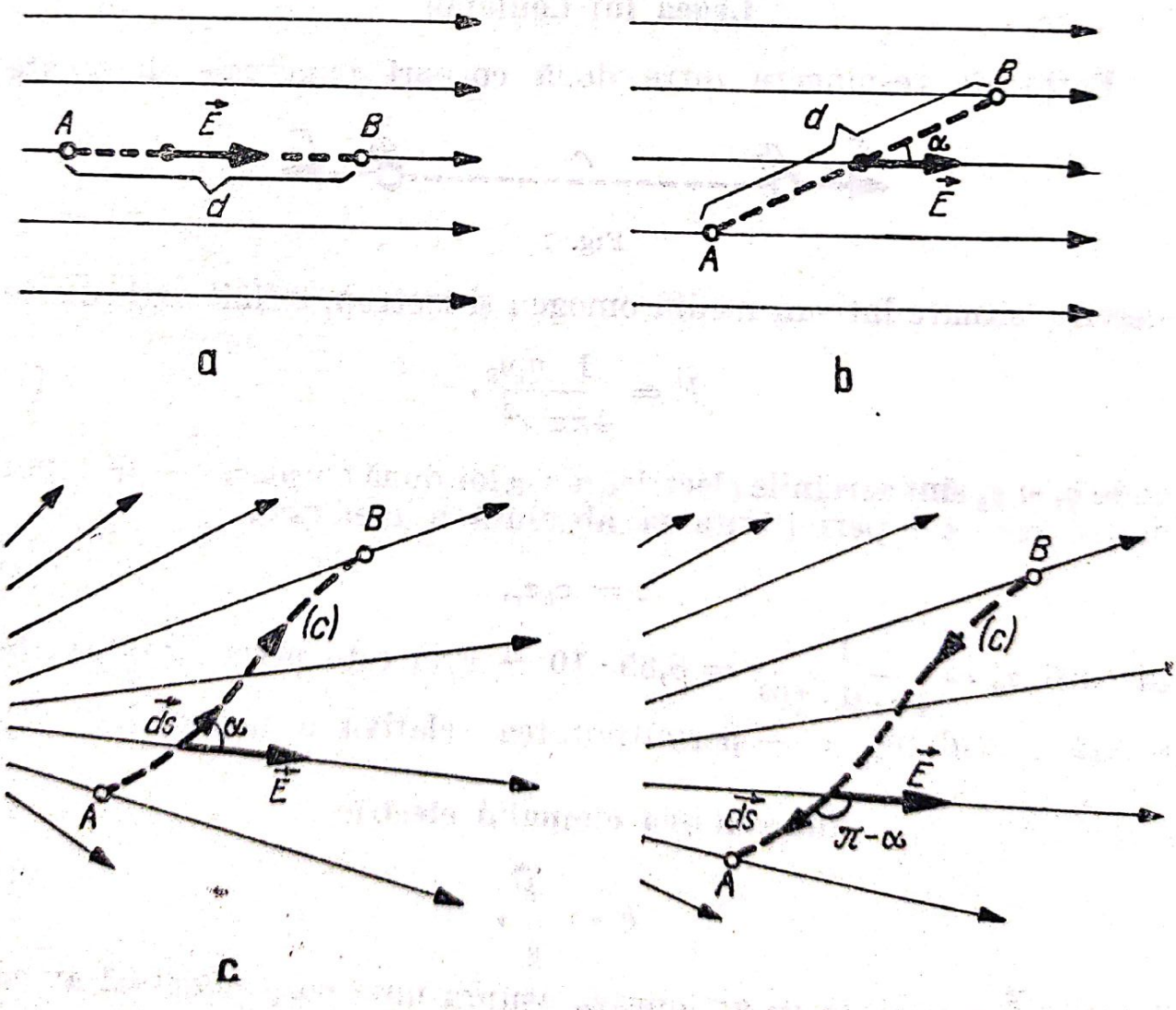


Fig. 3

$$U_{AB} = Ed, \tag{5}$$

iar de-a lungul unei drepte ce face un unghi α cu direcția liniilor de cîmp (fig. 3, b)

$$U_{AB} = Ed \cos \alpha. \tag{6}$$

În cîmp electric neuniform, tensiunea de-a lungul unei curbe (c), între două puncte A și B (fig. 3, c), este

$$U_{AB} = \int_{AB(c)} E \, ds \cos \alpha = \int_{AB(c)} \vec{E} \, \vec{ds}. \tag{7}$$

Tensiunea electrică este o mărime algebrică al cărei semn depinde de sensul de referință ales de-a lungul curbei (c) (fig. 2, d)

$$U_{BA} = \int_{BA(c)} \vec{E} \, \vec{ds}' = \int_{BA(c)} E \, ds \cos (\pi - \alpha) = - U_{AB}. \tag{8}$$

În cîmp electrostatic, tensiunea între două puncte A și B nu depinde de drum, astfel încît poate fi scrisă sub forma

$$U_{BA} = U_{AO} + U_{OB} = U_{AO} - U_{BO} = V_A - V_B, \tag{9}$$

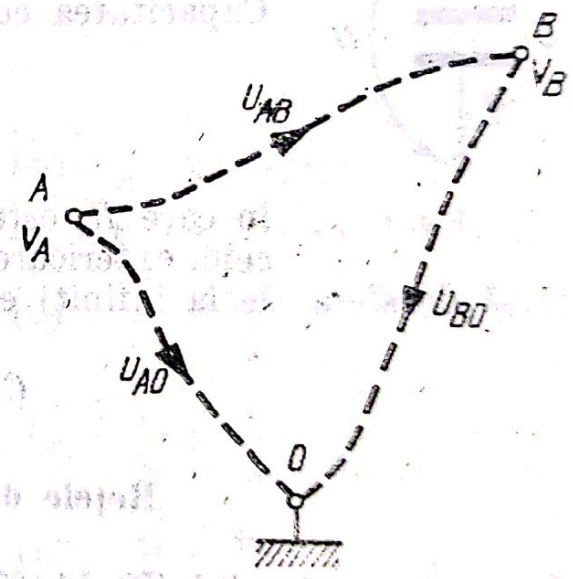


Fig. 4

unde $V_A = U_{AO}$ și $V_B = U_{BO}$ sînt potențialele electrice ale punctelor A și B, iar punctul O este un punct de referință, ales arbitrar ($V_0 = 0$). Luînd O la infinit, potențialul electric al unui punct M este tensiunea din punctul M pînă la infinit.

Potențialul electric al unui punct M (fig. 5), situat la distanța r de un corp punctual avînd sarcina q, este

$$V = \int_M^{\infty} \vec{E} \, \vec{dr} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{r}. \tag{10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ca o consecinţă a relaţiei (9), tensiunea de-a lungul unei curbe închise este nulă în cîmp electrostatic.

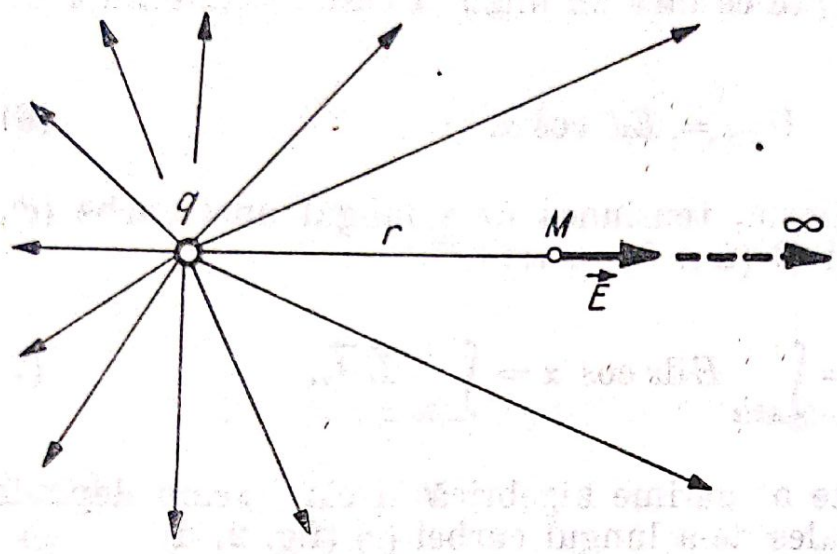


Fig. 5

Capacitatea unui condensator

$$C = \frac{q}{U}, \qquad (11)$$

în care q este sarcina de pe o armătură, U — tensiunea între armături (fig. 6).

Capacitatea condensatorului plan

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} \qquad (12)$$

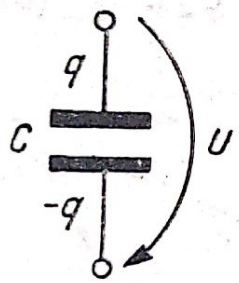


Fig. 6

cu ε — permitivitatea absolută a dielectricului, S — aria unei armături, d — distanţa între acestea.

Capacitatea condensatorului sferic

$$C = \frac{4\pi\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \qquad (13)$$

în care R_1 este raza armăturii interioare, iar R_2 a celei exterioare. Capacitatea unei sfere de rază R (faţă de sfera de la infinit) este

$$C = 4\pi\varepsilon R. \qquad (14)$$

Reţele de condensatoare

Prima teoremă a lui Kirchhoff pentru reţele de condensatoare

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = \sum_{k=1}^{n} q_{k0}, \qquad (15)$$

suma sarcinilor q_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) de pe armăturile condensatoarelor legate la un nod al reţelei este egală cu suma valorilor lor iniţiale q_{k0} (consecinţă a legii conservării sarcinii electrice). De obicei, condensatoarele sînt iniţial descărcate, astfel încît $q_{k0} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

A doua teoremă a lui Kirchhoff pentru rețele de condensatoare

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{C_k} = \sum_{k=1}^{n} E_k, \tag{16}$$

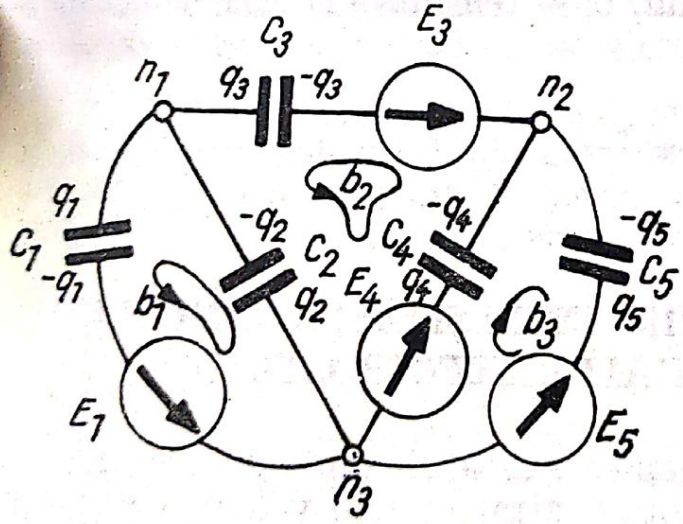
suma tensiunilor $\frac{q_k}{C_k}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ de la bornele condensatoarelor legate într-o buclă a unei rețele este egală cu suma t.e.m. ale surselor din buclă (consecință a faptului că în electrostatică tensiunea electrică e nulă de-a lungul unei curbe închise). În fig. 7 se dă un exemplu de aplicare a teoremelor lui Kirchhoff pentru o rețea avînd condensatoarele inițial descărcate.

Capacitatea echivalentă a unui sistem de n condensatoare legate în paralel este

$$C = C_1 + C_2 + \ldots . + C_n, \tag{17}$$

iar a unui sistem de n condensatoare legate în serie este dată de relația

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots . + \frac{1}{C_n} \tag{18}$$



$$(n_1) \quad q_1 - q_2 + q_3 = 0$$

$$(n_2) \quad -q_3 - q_4 - q_5 = 0$$

$$(b_1) \quad \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = E_1$$

$$(b_2) \quad -\frac{q_2}{C_2} + \frac{q_4}{C_4} - \frac{q_3}{C_3} = E_4 - E_3$$

$$(b_3) \quad \frac{q_4}{C_4} - \frac{q_5}{C_5} = E_4 - E_5$$

Fig, 7

Lucrul mecanic în cîmp electric. Energia electrică

Lucrul mecanic efectuat de cîmpul electric la deplasarea unui corp punctual, încărcat cu o sarcină q, între două puncte A și B (fig. 8) este

Scanned with OKEN Scanner

$$L_{AB} = \int_{AB(c)} F\,ds\cos\alpha = \int_{AB(c)} qE\,ds\cos\alpha = qU_{AB} = q\,(V_A - V_B). \tag{19}$$

Energia electrică (de interacţiune) a unui corp punctual avînd sarcina q, plasat într-un punct M al unui cîmp electric în care potenţialul electric este V, este egală cu lucrul mecanic cheltuit din exterior pentru a aduce corpul de la o distanţă foarte mare în punctul M

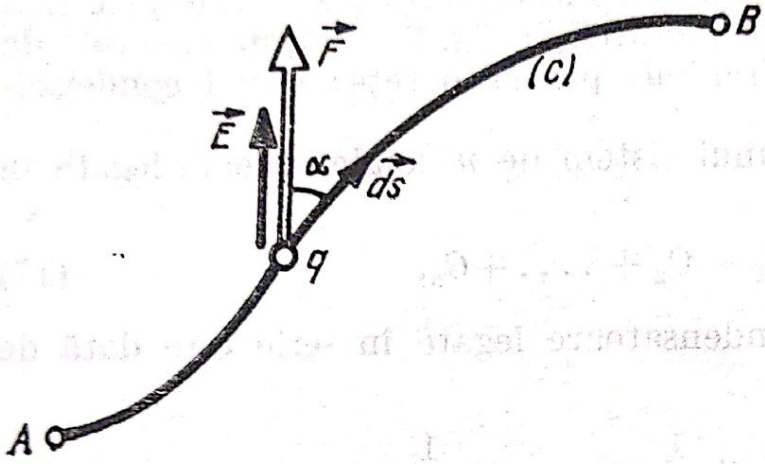


Fig. 8

$$W_e = L_{\infty M} = -\,qU_{\infty M} = qV. \tag{20}$$

Energia electrică a unui condensator rezultă

$$W_e = \frac{1}{2}\,qU = \frac{1}{2}\,CU^2 = \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{C}, \tag{21}$$

unde q — sarcina condensatorului, U — tensiunea la bornele acestuia, C — capacitatea.

* * *

2.1. LEGEA LUI COULOMB. INTENSITATEA CÎMPULUI ELECTRIC. POTENŢIALUL ELECTROSTATIC

2.1.1. (R) Atomul de hidrogen este alcătuit dintr-un proton şi un electron cu sarcini egale şi de semn contrar, avînd valoarea absolută $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. În starea fundamentală, raza orbitei electronului în jurul protonului fiind $r_0 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m, să se calculeze forţa de atracţie exercitată între electron şi proton.

2.1.2. Un proton are sarcina $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C şi masa $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg. Să se compare forţa de respingere coulombiană între doi protoni consideraţi punctuali, cu forţa de atracţie newtoniană între aceştia. Constanta atracţiei universale are valoarea $k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg \cdot s^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

2.1.3. (R) Calculaţi sarcina totală Q a electronilor existenţi într-o bilă de fier neîncărcată electric, avînd masa $m = 1$ g. Care ar fi forţa de atracţie dintre două astfel de bile situate la distanţa $d = 1$ m, dacă printr-un procedeu adecvat s-ar transporta $1‰$ din electronii uneia din bile pe cealaltă? Masa atomică a fierului este $A = 55{,}85$ kg/kmol, numărul său atomic este $Z = 26$, iar numărul lui Avogadro este $N_A = 6{,}025 \cdot 10^{26}$ kmol $^{-1}$. Este posibil experimentul?

2.1.4. Ce valoare au sarcinile electrice, egale, cu care ar trebui încărcate două bile identice avînd masa de 1 kg, situate în aer la distanţa de 1 mm una de alta, pentru ca forţa coulombiană exercitată asupra fiecărei bile să fie egală ca valoare cu greutatea ei într-un loc în care acceleraţia gravitaţiei este $g = 9{,}8$ ms^{-2}?

2.1.5. Două corpuri punctuale încărcate cu sarcini electrice de semne contrare sînt plasate succesiv în aer, la distanţa de $d_1 = 6{,}3$ cm şi în ulei, la distanţa $d_2 = 3$ cm, forţa de atracţie fiind aceeaşi în cele două cazuri. Se cere permitivitatea relativă a uleiului.

2.1.6. Două mici sfere identice situate în vid, avînd masele $m = 0{,}1$ g sînt suspendate de un acelaşi punct cu ajutorul a două fire izolante, inextensibile, de masă neglijabilă şi avînd aceeaşi lungime $l = 20$ cm. Care este valoarea sarcinilor egale cu care trebuie încărcate cele două sfere astfel încît unghiul format de cele două fire să fie $\alpha = 90°$? Se va considera acceleraţia gravitaţiei $g = 9{,}8$ m/s^2.

2.1.7. * (R) Ce valoare β va avea unghiul dintre cele două fire din problema precedentă după scufundarea sistemului în petrol cu densitatea $\rho_0 = 0{,}8$ kg/m^3 şi permitivitatea relativă $\varepsilon_r = 2$, dacă densitatea materialului bilelor este $\rho = 4$ kg/m^3?

2.1.8. Două sfere cu raze şi mase egale sînt suspendate de un suport prin două fire izolante şi inextensibile, avînd aceeaşi lungime. În vid, unghiul dintre fire este $\alpha = 90°$. Introducînd sistemul într-un fluid dielectric, avînd densitatea egală cu un sfert din densitatea materialului sferelor, unghiul dintre sfere devine $\beta = 60°$. Se cere permitivitatea relativă a materialului.

2.1.9. Introducînd sistemul din problema precedentă într-un alt fluid dielectric cu permitivitatea relativă $\varepsilon_r = 2$, unghiul dintre fire rămîne egal cu cel din vid. Se cere raportul dintre densitatea materialului sferelor şi densitatea fluidului dielectric.

2.1.10. ** Un corp punctual avînd masa $m = 0{,}4$ g şi sarcina $q = 28 \cdot 10^{-8}$ C este suspendat, ca în figură, cu un fir izolant cu lungimea $l = 30$ cm, de un punct situat pe suprafaţa unui perete vertical

Scanned with OKEN Scanner

conductor de dimensiuni foarte mari în rapot cu lungimea firului. Se cer : a) distanța x dintre corpul punctual și suprafața peretelui, la echilibru ; b) forța de întindere la care este supus firul. Se va lua accelerația gravitației $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

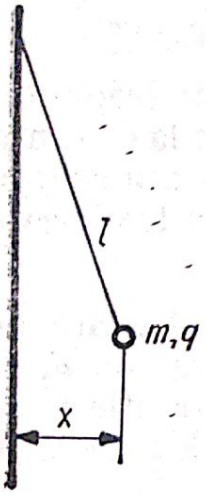


Fig. 2.1.10

2.1.11. Două corpuri punctuale încărcate cu sarcini $q_1 = 6{,}25 \cdot 10^{-6}\text{C}$ și $q_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\text{C}$ sînt atașate la cele două capete ale unui arc izolant, avînd constanta de elasticitate $k = 125 \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$ și lungimea în stare netensionată $l_0 = 10$ cm. Se cer : a) lungimea l a arcului întins sub efectul forțelor electrostatice ; b) forța ce întinde arcul.

2.1.12. Se consideră două corpuri punctuale, avînd sarcinile $q_1 = 1\mu\text{C}$ și $q_2 = 4\mu\text{C}$, situate în vid la distanța $d = 6$ cm. În ce punct trebuie plasat și cu ce sarcină q_3 trebuie să fie încărcat un al treilea corp punctual, astfel încît forțele electrostatice care se exercită asupra fiecăruia dintre cele trei corpuri să fie nule ?

2.1.13. * Un tetraedru regulat cu latura $a = 30$ cm are una dintre fețe orizontală și vîrful opus acesteia orientat în jos. În vîrfurile din planul orizontal sînt plasate trei corpuri punctuale cu sarcini egale și de același semn $q = 10^{-6}\text{C}$, iar în al patrulea vîrf un corp punctual cu sarcina $-q$. Se cere masa m a acestuia pentru a fi în echilibru sub efectul forțelor electrostatice și al greutății. Se ia $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

2.1.14. * Să se reprezinte grafic variația intensității cîmpului electric de-a lungul dreptei care unește două corpuri punctuale, avînd sarcinile $q_1 = 1\text{nC}$ și $q_2 = 4\text{nC}$, situate în aer la distanța $d = 60$ cm unul de altul. Se vor considera cazul cînd sarcinile sînt de același semn și cazul cînd sarcinile au semne contrare.

2.1.15. Să se calculeze intensitatea cîmpului electric în centrul unui pătrat cu latura $l = 10$ cm, plasat în vid, în vîrfurile căruia sînt situate patru corpuri punctuale, două avînd sarcina $q = 10^{-6}\text{C}$ și două sarcina $-q$.

2.1.16. Să se calculeze intensitatea cîmpului electric și potențialul electrostatic produs în centrul unui hexagon cu latura $l = 10$ cm de un ansamblu de șase corpuri punctuale plasate în vîrfurile hexagonului, avînd sarcini egale $q = 10^{-6}\text{C}$, trei pozitive și trei negative. Sistemul este situat în ulei avînd $\varepsilon_r = 5$. Discuție.

Scanned with OKEN Scanner

2.1.17. Se consideră un cîmp electric omogen de intensitate $E = 500$ V/m. Să se calculeze tensiunea U între două puncte A și B, situate la distanța $d = 2$ cm dacă unghiul dintre segmentul AB și liniile de cîmp are valoarea : a) $\alpha = 0$; b) $\alpha = 60°$; c) $\alpha = 90°$; d) $\alpha = 120°$; e) $\alpha = 180°$.

2.1.18. Care este sarcina q a unui corp punctual plasat în aer dacă diferența de potențial între două puncte situate la distanțele $r_1 = 1$ m și $r_2 = 2$ m de acesta este de 1 V?

2.1.19.* Să se reprezinte grafic variația potențialului electric în lungul dreptei care unește cele două corpuri punctuale din problema 2.1.14.

2.1.20. În două dintre vîrfurile unui pătrat cu latura $l = 9$ cm sînt plasate corpuri punctuale cu sarcini egale și de semn contrar, avînd valoarea absolută $q = 10^{-9}$C. Să se calculeze tensiunea U_{AB} între celelalte două vîrfuri A și B. Mediul are permitivitatea relativă $\varepsilon_r = 4$. Discuție.

2.2. CAPACITATEA CONDENSATOARELOR

2.2.1. Să se calculeze capacitatea C a unui condensator plan ale cărui armături sînt două discuri cu raza $R = 6$ cm, separate de un strat de aer cu grosimea $d = 1$ cm.

2.2.2. (R) O placă dielectrică cu grosimea $\delta = 3$ mm este introdusă între armăturile condensatorului din problema precedentă, paralel cu acestea astfel încît acoperă complet suprafața armăturilor. Capacitatea condensatorului devine $C' = 1{,}25$ C. Se cere permitivitatea relativă ε_r a materialului plăcii. Să se demonstreze că valoarea capacității condensatorului nu se modifică dacă placa este deplasată pe direcția normalei la armături.

2.2.3. Între armăturile unui condensator plan avînd ca dielectric aerul se introduce o placă de ebonită care acoperă integral suprafața armăturilor și care are grosimea egală cu un sfert din distanța dintre acestea. Care este variația relativă a capacității condensatorului, dacă ebonita are constanta dielectrică $\varepsilon_r = 2$?

2.2.4. Un condensator plan are o capacitate $C = 10$ pF, dielectricul său fiind aerul. Condensatorul fiind conectat la o sursă cu tensiunea la borne $U = 10$ V, intensitatea cîmpului electric din interior are valoarea $E = 1$ kV/m. Se cer : a) distanța d dintre armături ; b) aria S a acestora.

Scanned with OKEN Scanner

2.2.5. Distanţa între armăturile condensatorului din problema precedentă este redusă la jumătate. Se cere noua valoare E' a intensităţii cîmpului electric din condensator, a) dacă acesta a rămas conectat la bornele sursei; b) dacă fusese deconectat de la aceasta înainte de apropierea armăturilor.

2.2.6. Cît devine capacitatea condensatorului din problema 2.2.4, dacă jumătate din spaţiul dintre armături se umple cu un dielectric avînd permitivitatea relativă $\varepsilon_r = 2$, ca în figura alăturată? Să se calculeze intensitatea cîmpului electric din aer şi din dielectric pentru cele două cazuri.

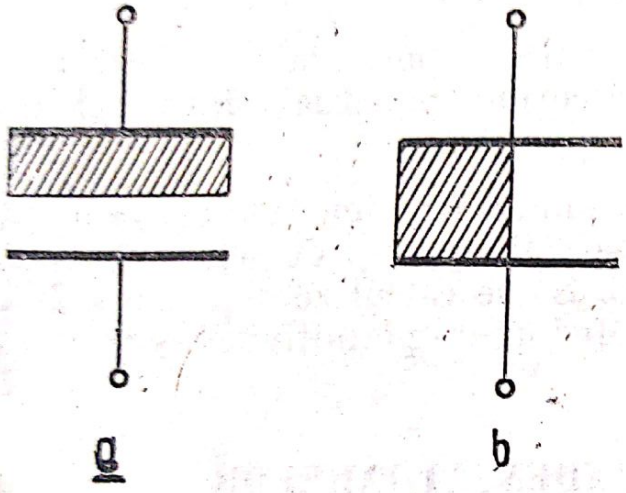


Fig. 2.2.6

2.2.7. Tensiunea la bornele unui condensator plan avînd ca dielectric aerul şi distanţa între armături $d = 2$ mm este $U = 50$ V. Se cer: a) intensitatea cîmpului electric din condensator; b) densitatea de suprafaţă ρ_s a sarcinilor electrice de pe armături; c) tensiunea maximă U_{max}, care se poate aplica între armăturile condensatorului dacă intensitatea cîmpului electric la care se produce străpungerea aerului este $E_{max} = 30$ kV/cm.

2.2.8. Un condensator plan, avînd aria armăturilor $S = 10$ cm^2 şi distanţa dintre acestea $d = 5$ mm, conţine o placă de porţelan cu grosimea $\delta = 4{,}5$ mm, de permitivitate relativă $\varepsilon_r = 6$. La bornele condensatorului se aplică o tensiune $U = 100$ V. Se cer: a) capacitatea C a condensatorului; b) intensitatea E_d a cîmpului electric în dielectric şi E_a în stratul de aer; c) tensiunea maximă care se poate aplica condensatorului, dacă străpungerea aerului se produce la o intensitate a cîmpului $E_{amax} = 30$ kV/cm, iar a porţelanului la $E_{dmax} = 100$ kV/cm.

2.2.9. Între armăturile unui condensator plan cu dielectric aer se introduce, paralel cu armăturile, o placă metalică plan-paralelă a cărei grosime este în raportul $k = 0{,}2$ cu distanţa dintre armături. Să se calculeze raportul între noua valoare C' a capacităţii condensatorului şi capacitatea iniţială C a acestuia. Să se demonstreze că rezultatul nu depinde de poziţia plăcii între armături.

2.2.10. Să se calculeze capacitatea unui condensator sferic avînd razele armăturilor $R_1 = 20$ cm şi $R_2 = 21$ cm şi ca dielectric aerul.

Scanned with OKEN Scanner

2.2.11. Care este raportul intensităţilor cîmpului electric la suprafaţa armăturilor condensatorului din problema precedentă?

2.2.12. a) Să se calculeze capacitatea Pămîntului, considerat o sferă conductoare izolată în vid, avînd raza $R = 6\ 400$ km; b) ce rază interioară trebuie să aibă un condensator sferic cu dielectric aer şi distanţa între armături $d = 1$ mm, pentru a avea aceeaşi capacitate.

2.2.13. O sferă conducătoare avînd raza $R = 1$ cm este menţinută la un potenţial $V = 200$ V, potenţialul la infinit considerîndu-se nul. Se cer: a) sarcina q a sferei; b) densitatea superficială ρ_s a sarcinii electrice de pe sferă; c) intensitatea E a cîmpului electric la suprafaţa sferei; d) potenţialul electrostatic V_1 şi intensitatea cîmpului electric E_1 într-un punct situat la o distanţă $R_1 = 1$ m de centrul sferei; e) potenţialul maxim V_{max} care poate fi comunicat sferei, dacă intensitatea cîmpului electric la care se produce străpungerea aerului este $E_{max} = 30$ kV/cm.

2.3. LUCRUL MECANIC ÎN CÎMP ELECTRIC. ENERGIA ELECTROSTATICĂ

2.3.1.* (R) Să se calculeze lucrul mecanic necesar pentru deplasarea a două corpuri punctuale, încărcate cu sarcinile q_1 şi respectiv q_2, de la distanţa r_1 la distanţa $r_2 > r_1$. Discuţie în funcţie de semnul sarcinilor q_1 şi q_2.

2.3.2. Mărind cu $l = 0{,}1$ m distanţa dintre două corpuri punctuale încărcate electric, forţa de atracţie scade de la $F_1 = 8$ mN la $F_2 = 2$ mN. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat pentru această deplasare.

2.3.3. În două vîrfuri alăturate ale pătratului din figură, cu latura de 0,1 m, sînt plasate două corpuri punctuale avînd sarcinile $q_A = 10^{-6}$C şi $q_B = -10^{-6}$C. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat la deplasarea lentă a unui corp punctual încărcat cu o sarcină $q = 10^{-9}$C între punctele: a) $D-C$; b) $Q-N$; c) $M-P$; d) $Q-M$; e) $N-P$; f) $D-N$.

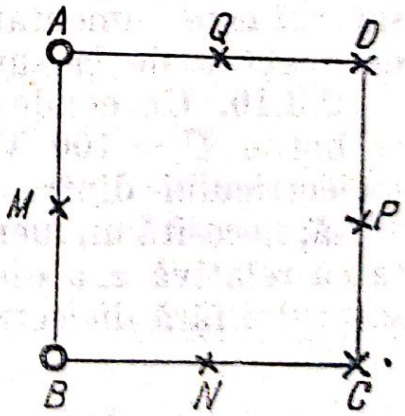


Fig. 2.3.3

2.3.4. (R). Care este energia de interacţiune electrostatică a unui sistem de trei corpuri punctuale avînd sarcinile $q_1 = q_2 = q_3 = 10^{-6}$ C,

Scanned with OKEN Scanner

plasate în aer, în vîrfurile unui triunghi echilateral cu latura $l = 0{,}1$ m.

2.3.5.* (R) Să se calculeze energia electrică a unui condensator cu capacitatea C, încărcat cu o sarcină Q. Să se exprime rezultatul și în funcție de capacitatea C și tensiunea U la borne a condensatorului.

2.3.6.* (R) Să se calculeze forța de atracție între armăturile unui condensator plan, cunoscînd aria S a armăturilor, permitivitatea ε a dielectricului și sarcina Q a armăturilor.

2.3.7. (R) Ce lucru mecanic L trebuie cheltuit pentru a dubla distanța între armăturile unui condensator plan cu dielectric aer, avînd capacitatea inițială C și sarcina armăturilor constantă Q?

2.3.8. Un condensator plan are suprafața armăturilor S, iar distanța d dintre acestea este ocupată de o placă de dielectric, avînd permitivitatea relativă ε_r. Condensatorul este încărcat prin conectarea la o sursă cu tensiunea la borne U, apoi este deconectat. Se cer: a) lucrul mecanic L necesar pentru extragerea lentă a plăcii de dielectric dintre armăturile condensatorului, neglijînd frecările; b) tensiunea U' la bornele condensatorului după scoaterea dielectricului.

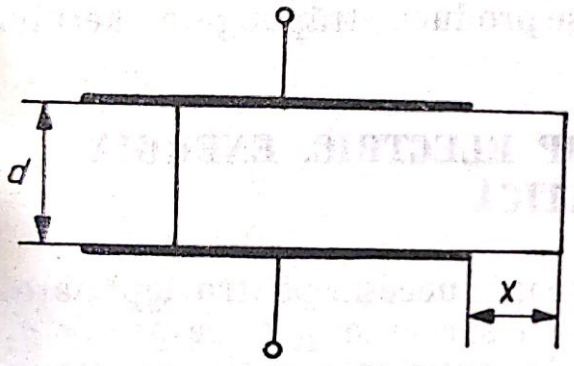


Fig. 2.3.8

2.3.9. Să se calculeze raportul dintre energia electrică W' a condensatorului din problema 2.2.9 după introducerea plăcii metalice și energia sa inițială W, dacă: a) condensatorul este alimentat cu o tensiune constantă; b) condensatorul este deconectat de la sursă înainte de introducerea plăcii metalice.

2.3.10. Un condensator plan cu izolator dielectric are tensiunea la borne $U = 100$ V și energia electrică $W = 10^{-6}$ J. Extragerea dielectricului dintre armăturile condensatorului, deconectat de la sursă, necesită un lucru mecanic $L = 2 \cdot 10^{-6}$ J. Se cer: a) permitivitatea relativă ε_r a dielectricului; b) tensiunea U la bornele condensatorului fără dielectric; c) capacitatea inițială C a condensatorului.

2.4. REȚELE DE CONDENSATOARE. CAPACITĂȚI ECHIVALENTE

2.4.1. Două condensatoare legate în serie au o capacitate echivalentă $C_s = 2$ μF, iar legate în paralel o capacitate $C_p = 9$ μF. Să se calculeze capacitățile celor două condensatoare.

Scanned with OKEN Scanner

2.4.2. Între ce limite se poate regla capacitatea unui sistem de două condensatoare variabile, avînd fiecare capacitatea reglabilă între 10 şi 100 pF.

2.4.3. Să se calculeze capacitatea echivalentă C a bateriei de condensatoare din figură în cazurile cînd întrerupătorul K este: a) deschis; b) închis. Capacităţile condensatoarelor sînt $C_1 = C_4 = 2\ \mu F$; $C_2 = C_3 = 6\mu F$.

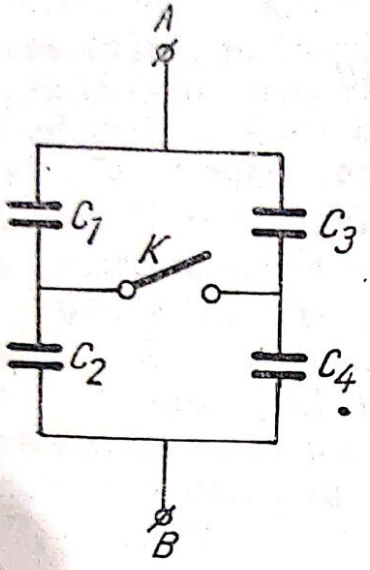


Fig. 2.4.3

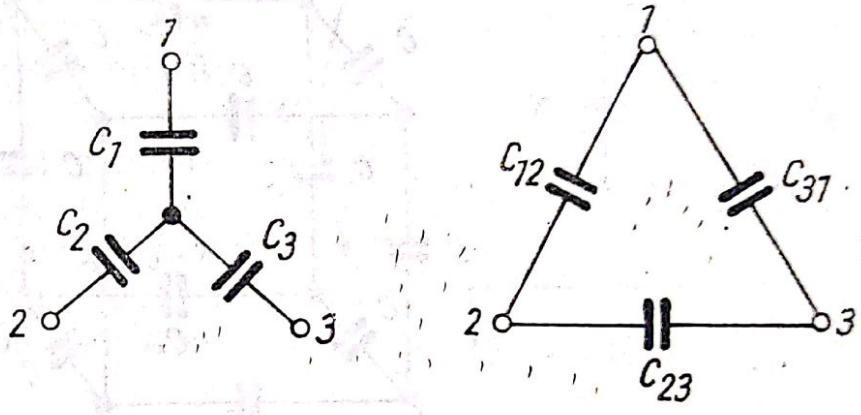


Fig. 2.4.4

2.4.4.* (R) Să se calculeze capacităţile condensatoarelor din montajul în stea din figură pentru ca acesta să fie echivalent montajului triunghi, ale cărui condensatoare au valori cunoscute ale capacităţilor (transfigurarea triunghi-stea).

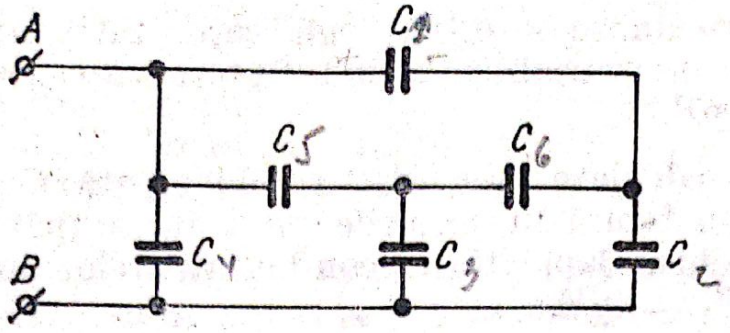
2.4.5.* Utilizînd rezultatele obţinute la problema precedentă, stabiliţi relaţiile pentru transfigurarea inversă stea-triunghi.

2.4.6. Să se calculeze capacitatea echivalentă a sistemului de condensatoare din figurile a, b, c în care fiecare condensator are aceeaşi capacitate C.

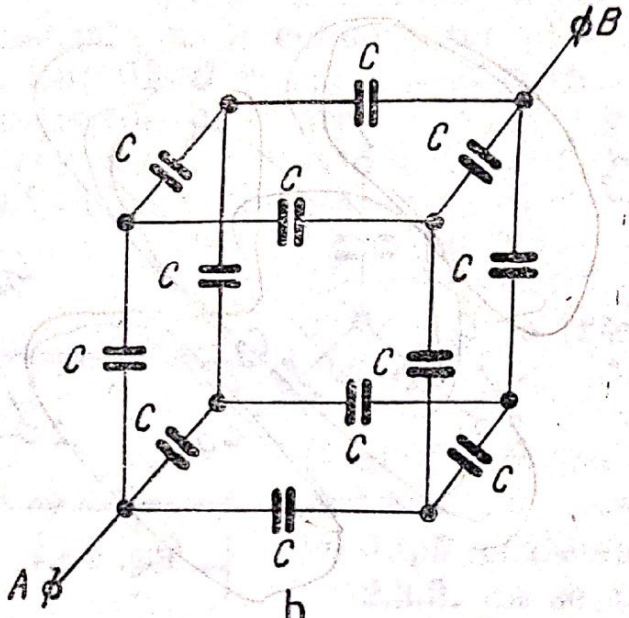
2.4.7. Capacităţile condensatoarelor din schema din figură sînt $C_1 = 2\ \mu F$ şi $C_2 = 4\ \mu F$, iar tensiunea la bornele AB este $U = 12$ V. Se cer tensiunile la bornele condensatoarelor şi sarcinile acestora.

2.4.8. Trei condensatoare avînd capacităţile $C_1 = 2\ \mu F$; $C_2 = 3\ \mu F$; $C_3 = 6\ \mu F$ sînt conectate în serie cu o sursă, avînd tensiunea electromotoare $\mathcal{E} = 6$ V. Se cer: a) capacitatea echivalentă a sistemului de condensatoare; b) tensiunea la borne şi sarcina de pe armăturile fiecărui condensator.

Scanned with OKEN Scanner



a



b

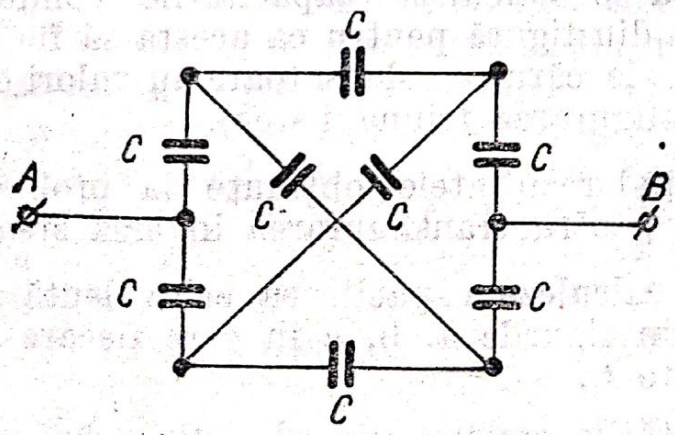


Fig. 2.4.6

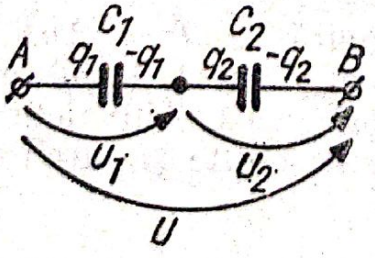


Fig. 2.4.7

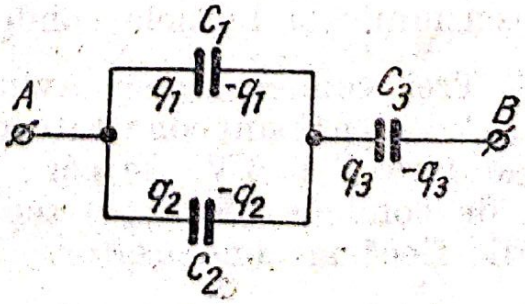


Fig. 2.4.9

Scanned with OKEN Scanner

2.4.9. În circuitul din figură, capacitățile condensatoarelor sînt $C_1 = 3\ \mu F$; $C_2 = 2\ \mu F$ și $C_3 = 5\ \mu F$. Se cer: a) capacitatea echivalentă a sistemului de condensatoare; b) tensiunea ce trebuie aplicată la bornele AB pentru ca sarcina condensatorului C_2 să fie $q_2 = 6 \cdot 10^{-5}$ C.

2.4.10. În rețeaua din figură, capacitățile condensatoarelor sînt $C_1 = 1\ \mu F$; $C_2 = 3\ \mu F$; $C_3 = 2\ \mu F$; $C_4 = 4\ \mu F$. Se cer: a) capacitatea echivalentă a sistemului de condensatoare; b) tensiunea la borne și sarcina de pe armăturile fiecărui condensator, dacă tensiunea aplicată la bornele circuitului este $U = 9$ V; c) energia electrostatică a fiecărui condensator.

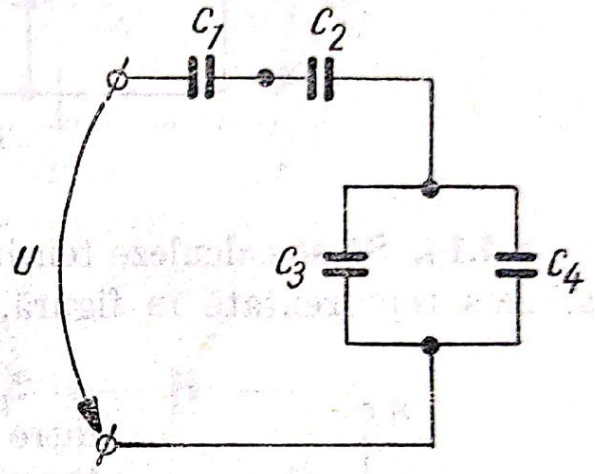


Fig. 2.4.10

2.4.11. Să se calculeze ce tensiune trebuie aplicată la bornele circuitului din problema precedentă pentru ca tensiunea la bornele condensatorului C_2 să aibă valoarea $U_2 = 4{,}5$ V.

2.4.12. Cele două condensatoare din figură, avînd capacitățile $C_1 = 6\ \mu F$ și $C_2 = 4\ \mu F$, sînt încărcate cu sarcinile $q_1 = 24\ \mu C$ și $q_2 = 6\ \mu C$. a) Să se calculeze sarcinile Q_1 și Q_2 ale celor două condensatoare după punerea lor în paralel prin închiderea întrerupătorului K. b) Să se calculeze energia electrostatică a celor două condensatoare în starea inițială și în starea finală și să se explice diferența obținută.

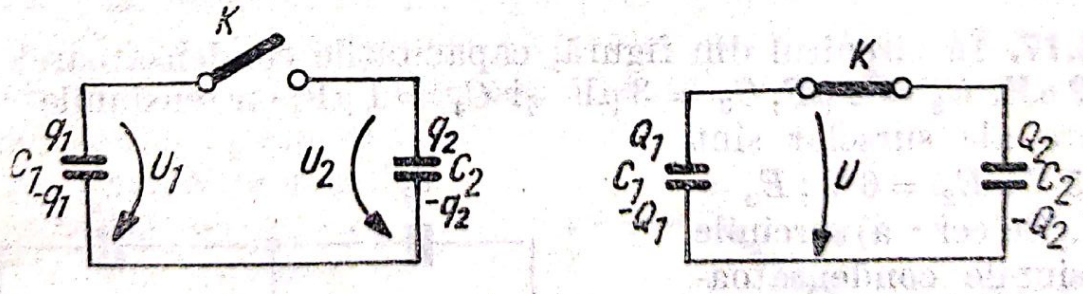


Fig. 2.4.12

2.4.13. (R). Două sfere avînd razele $R_1 = 1$ cm și $R_2 = 2$ cm, situate la o distanță $d = 2$ m, sînt încărcate cu sarcini egale q, de același semn. Se unesc cele două sfere printr-un conductor, care este

Scanned with OKEN Scanner

apoi îndepărtat. Să se calculeze raportul dintre forța de respingere dintre sfere în noua stare și forța de respingere din starea inițială.

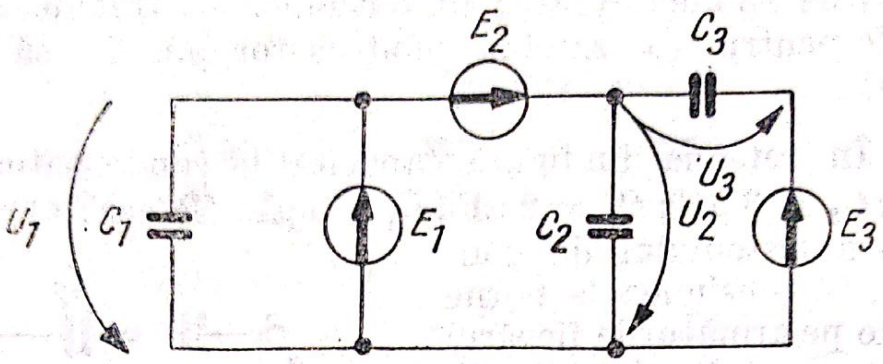


Fig. 2.4.14

2.4.14. Să se calculeze tensiunile și sarcinile condensatoarelor din schema reprezentată în figură.

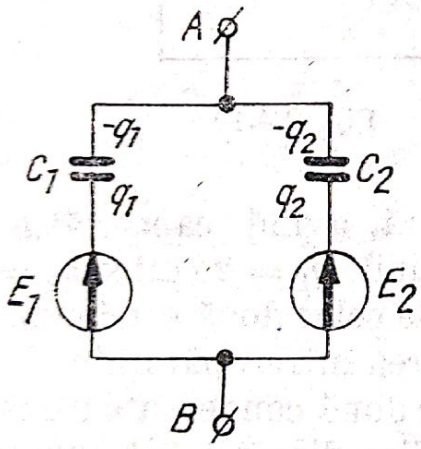


Fig. 2.4.15

2.4.15. (R) Să se calculeze tensiunea între bornele AB și sarcinile condensatoarelor din circuitul reprezentat în figură, în care $C_1 = 2\ \mu F$, $C_2 = 3\ \mu F$, $E_1 = 6\ V$ și $E_2 = 8\ V$.

2.4.16. În circuitul din figură, capacitățile condensatoarelor sînt $C_1 = 1\ \mu F$, $C_2 = 2\ \mu F$, $C_3 = 3\ \mu F$, iar tensiunile electromotoare ale surselor sînt $E_1 = 6\ V$, $E_2 = 3\ V$. Să se calculeze sarcinile și tensiunile condensatoarelor.

2.4.17. În circuitul din figură, capacitățile condensatoarelor sînt $C_1 = 2\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$, $C_3 = 3\ \mu F$ și $C_4 = 1\ \mu F$, iar tensiunile electromotoare ale surselor sînt $E_1 = 5\ V$; $E_2 = 6\ V$; $E_3 = 9\ V$. Se cer: a) sarcinile și tensiunile condensatoarelor; b) tensiunile între perechile de borne ac; ad; bh; ch; c) energiile electrostatice ale condensatoarelor.

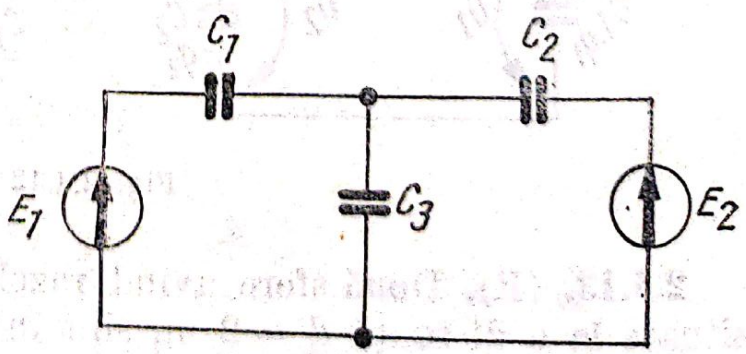


Fig. 2.4.16

2.4.18.* (R) Să se calculeze sarcinile de pe armăturile condensatoarelor din circuitul din figură înainte şi după închiderea întrerupătorului K. Valorile elementelor schemei sînt $C_1 = C_2 = C_4 = 2\ \mu F$,

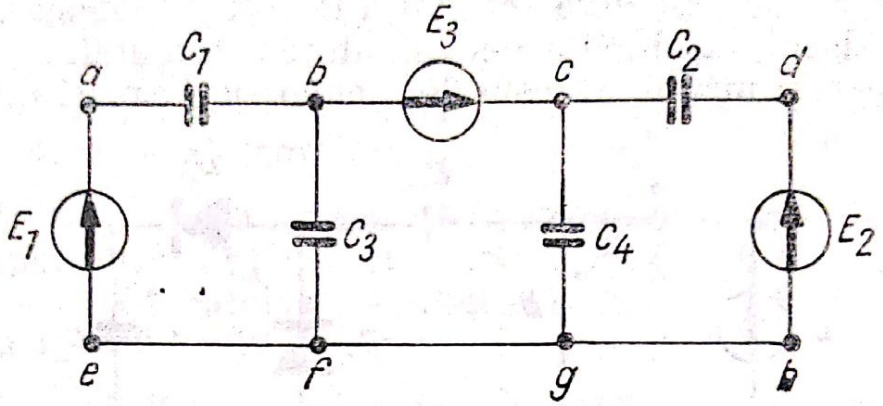


Fig. 2.4.17

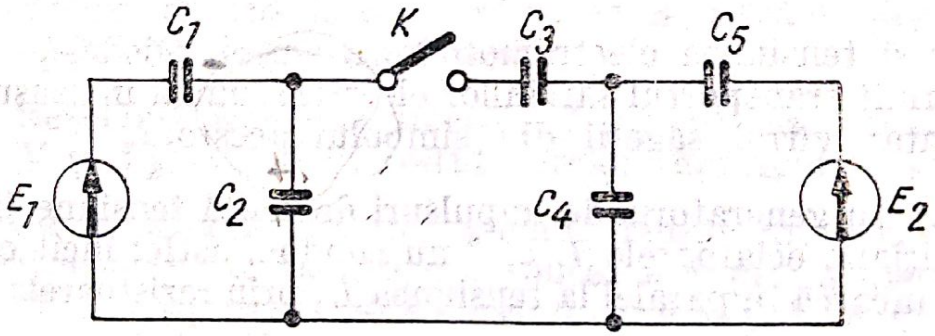


Fig. 2.4.18

$C_3 = 4\ \mu F$, $C_5 = 1\ \mu F$, $E_1 = 140$ V şi $E_2 = 90$ V. Se consideră condensatoarele neîncărcate înainte de legarea în reţea.

2.4.19.** În circuitul din figură, capacităţile condensatoarelor sînt $C_1 = 1\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$ şi tensiunea electromotoare a sursei are valoarea $E = 10$ V. În momentul iniţial, comutatorul K se află pe poziţia a, iar condensatorul C_2 este descărcat. Se trece K pe poziţia b, apoi este readus în a etc. Să se calculeze tensiunea la bornele condensatoarelor şi sarcinile de pe armăturile acestora după cea de-a n-a comutare a lui K pe poziţia b.

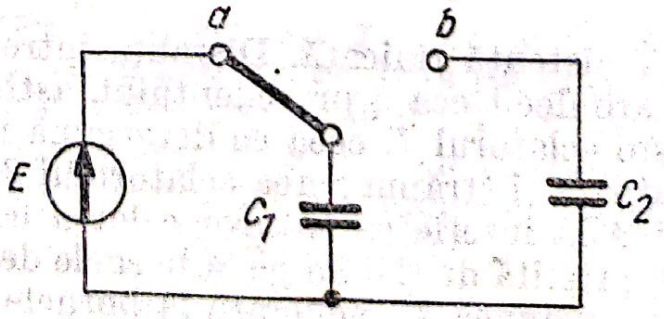


Fig. 2.4.19

Scanned with OKEN Scanner

2.4.20.* Să se calculeze energia electrostatică a condensatorului din problema precedentă în starea inițială și după prima comutare a lui K în b. Discuție.

2.4.21.* Să se calculeze tensiunea la bornele condensatorului C_2 din figura alăturată, după a n-a comutare a comutatorului K de pe poziția a pe b și înapoi. Se consideră cunoscute capacitățile condensatoarelor și tensiunea electromotoare a sursei. Diodele, presupuse ideale, permit transportul sarcinilor electrice numai în sensul în care este orientat vîrful săgeții din simbolul acestora.

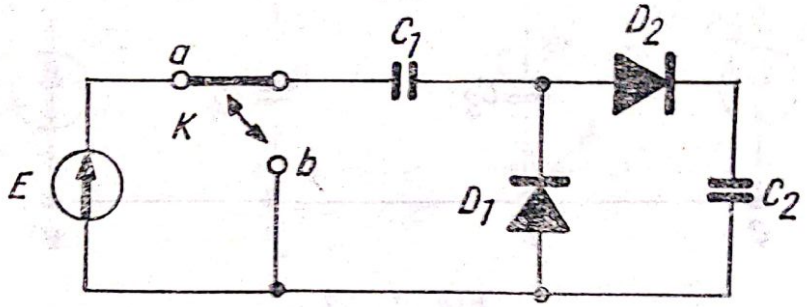


Fig. 2.4.21

2.4.22.* În generatorul de impulsuri de înaltă tensiune din figură, în faza inițială, eclatoarele *1*, *2*, *3* nu conduc, astfel încît condensatoarele se încarcă în paralel la tensiunea U_1 prin rezistoarele R, avînd

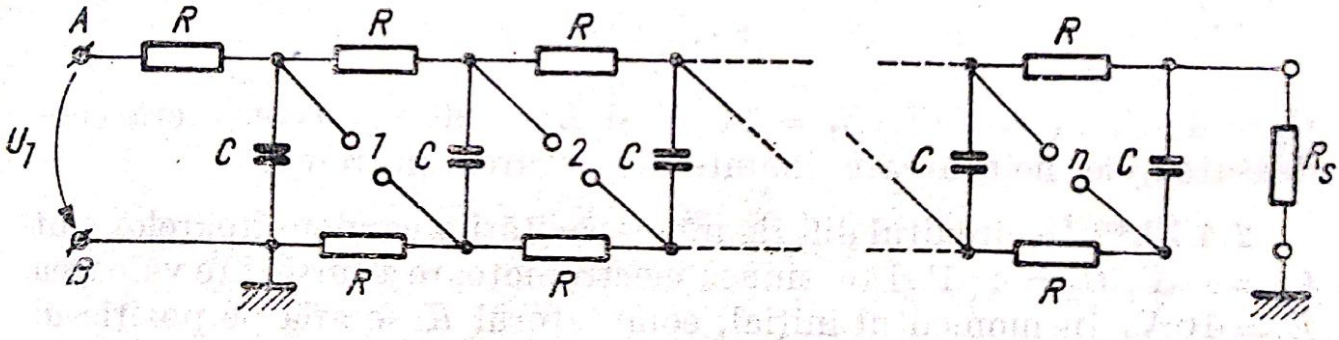


Fig. 2.4.22

o rezistență ridicată. Distanța între sferele fiecărui eclator este mai mare decît cea a precedentului, astfel încît primul care se străpunge este eclatorul *1*, ceea ce determină înserierea primelor două condensatoare și străpungerea eclatorului *2*, procesul continuînd în cascadă, pînă la înserierea tuturor celor n condensatoare. Se cer : a) sarcina Q, primită de sistem pe la bornele de intrare AB în timpul încărcării ; b) tensiunea U_2 generată la bornele de ieșire MN și sarcina ce trece prin rezistorul de sarcină R_s în timpul descărcării.

Scanned with OKEN Scanner

2.5. MIȘCAREA ÎN CÎMP ELECTRIC A CORPURILOR ÎNCĂRCATE

2.5.1. Care este variația energiei cinetice a unui electron după parcurgerea distanței $l = 2$ mm în lungul unei linii de cîmp electric în interiorul unui condensator plan, avînd tensiunea la borne $U = 800$ V și distanța între armături $d = 1$ cm? Se neglijează efectul gravitației. Sarcina electronului este $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

2.5.2. Cu ce viteză v ajunge într-un punct B un electron aflat inițial în repaus într-un punct A, dacă diferența de potențial $(V_B - V_A)$ este de 1 V? Sarcina electronului este $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, masa electronului $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

2.5.3. O mică sferă avînd masa $m = 0{,}1$ g și sarcina pozitivă $q = 2 \cdot 10^{-6}$ C se deplasează între două puncte A și B situate la aceeași înălțime și avînd potențialele $V_A = 300$ V și $V_B = -200$ V față de pămînt. Ce viteză avea sfera în A, dacă viteza sa în B este $v_B = 6$/ms? Se neglijează frecările.

2.5.4. Rezolvați problema precedentă pentru cazul în care $V_A = -125$ V și $V_B = 200$ V, restul datelor rămînînd neschimbate.

2.5.5. Cu ce energie cinetică trebuie lansat un corp punctual avînd sarcina $q_1 = 1\mu$C pentru a se putea apropia la distanța $d = 1$ mm de un corp punctual fix avînd sarcina $q_2 = 5\mu$C. Mișcarea se produce în vid, iar distanța dintre cele două corpuri în momentul lansării se consideră suficient de mare pentru a putea neglija energia de interacțiune electrostatică în etapa inițială.

2.5.6. Un corp punctual, avînd masa $m = 0{,}1$ g și sarcina $q = 10^{-9}$ C, se deplasează pe o traiectorie rectilinie ce trece printr-un al doilea corp punctual fix, avînd sarcina $Q = 3 \cdot 10^{-6}$ C. La distanța $r_0 = 1$ m, viteza corpului este $v_0 = 10$ m/s, fiind îndreptată spre corpul fix. Să se calculeze distanța minimă r_{min} la care se apropie cele două corpuri. Se presupune că deplasarea se produce în vid.

2.5.7. O particulă α avînd masa $4u$, sarcina $q = 2e$ și viteza $v_0 = 2 \cdot 10^7$ m/s cade pe o țintă de aluminiu. La ce distanță minimă se poate apropia particula α de un nucleu de aluminiu? Ce valoare are forța maximă de respingere între particula α și nucleu? Sarcina nucleului de aluminiu este $Q = Ze$, unde $Z = 13$ este numărul atomic al aluminiului, iar $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C sarcina unui electron. ($1\ u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg).

2.5.8. Un electron se află în interiorul unui condensator plan cu vid avînd distanța dintre armături $d = 1$ cm și tensiunea la borne

Scanned with OKEN Scanner

de $U = 100$ V. Se cer: a) forța care acționează asupra electronului; b) accelerația mișcării electronului; c) timpul necesar pentru traversarea condensatorului, presupunînd că electronul se află inițial în repaus în vecinătatea armăturii negative; d) viteza cu care electronul atinge armătura pozitivă. Se dau: sarcina electronului $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C și masa electronului $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

2.5.9.* O picătură de ulei, electrizată, avînd masa $m = 10^{-14}$ kg, se află între armăturile unui condensator plan, plasate orizontal la o distanță $d = 1$ cm una de cealaltă. În lipsa cîmpului electric, picătura cade sub efectul greutății sale și, datorită frecării cu aerul, atinge o viteză limită $v_1 = 0{,}2$ mm/s. Aplicînd o tensiune $U = 490$ V între armătura superioară și cea inferioară a condensatorului, viteza limită cu care cade picătura devine $v_2 = 0{,}12$ mm/s. Se cer: a) sarcina electrică q a picăturii de ulei exprimată în sarcini elementare; b) viteza limită v_3 a picăturii dacă se inversează polaritatea tensiunii aplicate; c) valoarea U' și polaritatea tensiunii aplicate condensatorului care menține în repaus picătura între armăturile condensatorului. Se consideră forța de frecare cu aerul proporțională cu viteza picăturii, se neglijează efectul forței arhimedice și se ia $g = 9{,}8$ m/s^2.

2.5.10. O particulă de praf avînd masa $m = 10^{-10}$ g și sarcina $q = 5 \cdot 10^{-17}$ C cade între armăturile unui condensator plan, plasate vertical la o distanță $d = 2$ cm una de cealaltă. Sub efectul forței de frecare cu aerul, care crește proporțional cu viteza particulei, mișcarea acesteia se face uniform, după atingerea unei anumite viteze limită. Ce valoare are tensiunea aplicată între armăturile condensatorului dacă traiectoria particulei face un unghi $\alpha = 45°$ cu verticala. Se va lua $g = 9{,}8$ m/s^2 și se va neglija efectul forței arhimedice.

2.5.11. Un corp punctual avînd masa $m = 10^{-6}$ kg și sarcina $q = 10^{-9}$ C cade liber în vid de la o înălțime $h_1 = 20$ cm, după care pătrunde în mijlocul intervalului dintre armăturile unui condensator plan, plasate vertical la o distanță $d = 2$ cm. Se cer: a) tensiunea care trebuie aplicată condensatorului pentru ca, în momentul cînd corpul atinge una dintre armături, viteza lui să fie orientată sub un unghi $\alpha = 45°$ față de planul acesteia; b) timpul total de cădere al corpului; c) distanța h_2 parcursă pe verticală de corpul punctual din momentul intrării în condensator și pînă la atingerea armăturii. Se va lua $g = 9{,}8$ m/s^2.

2.5.12.* O picătură de ulei, electrizată, avînd sarcina $q = 10^{-17}$ C și densitatea $\rho = 911$ kg/m^3 se află între plăcile unui condensator

Scanned with OKEN Scanner

plan orizontal. Stabilind în condensator un cîmp omogen orientat în sus, picătura urcă cu o viteză uniformă $v_1 = 0{,}2$ mm/s, iar schimbînd sensul cîmpului picătura coboară uniform cu $v_2 = 0{,}4$ mm/s. Aerul din condensator are densitatea $\rho_0 = 1{,}3$ kg/m^3 şi viscozitatea dinamică $\eta = 1{,}82 \cdot 10^{-5}$ Ns/m^2. Forţa de frecare între picătura de ulei şi aer este dată de relaţia lui Stokes $F = 6\pi\eta rv$. Se va lua acceleraţia gravitaţiei $g = 9{,}8$ m/s^2. Se cer : a) raza picăturii ; b) intensitatea cîmpului electric din condensator ; c) viteza v_3 a picăturii în lipsa cîmpului electric.

2.5.13. Un electron intră în viteza $v_0 = 10^5$ m/s la mijlocul intervalului dintre armăturile unui condensator plan, paralel cu acestea. Distanţa dintre armături este $d = 1$ cm, iar lungimea lor $l = 10$ cm. Care este tensiunea minimă ce trebuie aplicată condensatorului pentru ca electronul să nu poată părăsi condensatorul? Se dau : sarcina electronului $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, masa electronului $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

2.5.14.* Un fascicul de electroni accelerat sub o diferenţă de potenţial $U_a = 4\,550$ V trece prin mijlocul intervalului dintre armăturile unui condensator plan, paralel cu acestea, ca în figură.

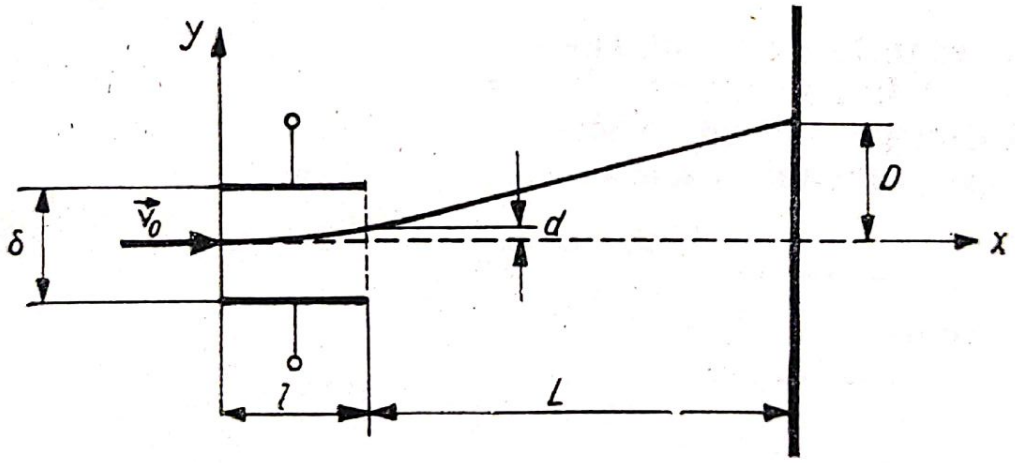


Fig. 2.5.14

Distanţa dintre armăturile condensatorului este $\delta = 5$ mm, lungimea acestora $l = 4$ cm, iar la o distanţă $L = 18$ cm de la ieşirea din condensator fasciculul loveşte un ecran fluorescent, dînd un spot luminos. Se cer : a) viteza v_0 cu care pătrund electronii din fascicul în interiorul condensatorului ; b) componenta vitezei electronilor perpendiculară pe plăcile condensatorului şi abaterea d a fasciculului din planul median la ieşirea din condensator în funcţie de tensiunea U aplicată acestuia ; c) abaterea D a spotului pe ecran

Scanned with OKEN Scanner

în funcţie de U. Se dau sarcina şi masa electronului : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C şi $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$kg. Se neglijează efectele relativiste.

2.5.15.* (R) Pe un plan înclinat cu un unghi $\alpha = 30°$ se află un corp punctual de masă $m = 1$ g, încărcat cu o sarcină $q = 14$ nC, la o înălţime $h_1 = 0{,}5$ m. La capătul de jos al planului înclinat se află un alt corp punctual fix încărcat cu o sarcină $Q = 3{,}5\mu$C. Se lasă primul corp să alunece, fără frecare, în lungul planului înclinat. Se cer : a) punctul în care acceleraţia corpului este nulă ; b) distanţa minimă la care se apropie cele două corpuri ; c) viteza maximă v pe care o atinge corpul în timpul deplasării sale. Se ia $g = 9{,}8$ m/s^2.

2.5.16.** (R) O particulă de masă m şi sarcină q se află în repaus la distanţa r_1 de o particulă fixă avînd sarcina $-Q$, de semn contrar lui q. Se cere timpul în care particula mobilă, lăsată liberă, se apropie la distanţa r_2 de particula fixă. Nu se iau în considerare efectele relativiste. Caz particular $r_2 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

3. CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT CONTINUU

BREVIAR

Curentul electric și electroliza

Intensitatea curentului electric dintr-un conductor

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

unde ΔQ este sarcina electrică transportată prin secțiunea transversală a conductorului de la momentul t la momentul $t + \Delta t$.

Intensitatea curentului electric este o mărime algebrică cu un semn care depinde de *sensul de referință* ales în lungul conductorului (fig. 1).

Sarcina electrică Q transportată într-un interval de timp de durată t, prin secțiunea transversală a unui conductor parcurs de un curent electric continuu (adică cu intensitate constantă în timp), este

$$Q = It, \tag{2}$$

cu I — intensitatea curentului electric continuu din conductor.

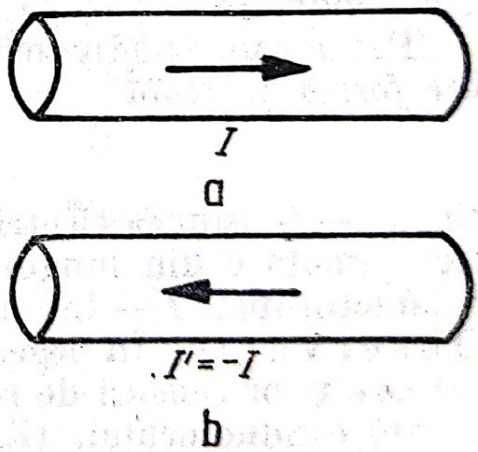


Fig. 1

Densitatea curentului electric în punctele unei secțiuni transversale a unui conductor străbătută uniform de un curent electric

$$J = \frac{I}{A} \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde I este intensitatea curentului electric, iar A — aria secțiunii transversale a conductorului.

Prima lege a electrolizei

$$m = kQ \tag{4}$$

cu : m — masa de substanță depusă pe un electrod, Q — sarcina electrică trecută prin secțiunea transversală a electrolitului, dată de formula (2), k — echivalentul electrochimic al substanței depuse.

A doua lege a electrolizei

$$k = \frac{1}{F}\frac{A}{v}, \tag{5}$$

în care : $F = 96500$ coulombi/echivalent-gram se numește constanta lui Faraday, $\frac{A}{v}$ — echivalentul-gram, egal cu raportul dintre masa atomică A a substanței depuse și valența v a acesteia.

Legea lui Ohm

Pentru un conductor fără tensiune electromotoare *legea lui Ohm* se exprimă

$$U = RI, \tag{6}$$

unde : U — tensiunea electrică din lungul conductorului, R — rezistența electrică a conductorului, I — intensitatea curentului electric din conductor.

Pentru un conductor cu tensiune electromotoare *legea lui Ohm are forma generală*

$$U + E = RI, \tag{7}$$

cu : U — tensiunea electrică din lungul conductorului, E — tensiunea electromotare din lungul conductorului, R — rezistența electrică a conductorului, I — intensitatea curentului electric din conductor.

O b s e r v a ț i e. În legea lui Ohm (6), (7) intervin valori corespunzătoare unor sensuri de referință (sensuri pozitive) la fel orientate în lungul conductorului. (Exemplificare în fig. 2.)

Rezistența electrică a unui conductor omogen de rezistivitate ρ, lungime L și secțiune transversală de arie constantă A este

$$R = \rho\frac{L}{A}. \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezistivitatea unui conductor metalic variază cu temperatura

$$\rho_\theta = \rho_{\theta_0} [1 + \alpha (\theta - \theta_0)], \quad (9)$$

cu ρ_θ, ρ_{θ_0} — rezistivităţile la temperatura θ respectiv θ_0,

α — coeficientul de temperatură al rezistivităţii.

Teoremele lui Kirchhoff

Tensiunea electrică în cîmpul electric al circuitelor de curent continuu este egală cu *diferenţa de potenţial electric*

$$U_{AB} = V_A - V_B, \quad (10)$$

unde : U_{AB} — tensiunea electrică de la punctul A la punctul B, V_A, V_B — potenţialele electrice ale punctelor A şi B.

Consecinţă. Tensiunea electrică dintre două puncte este aceeaşi pe diferitele curbe care unesc cele două puncte. Tensiunea din lungul conductorului este egală cu tensiunea la borne de-a lungul unei curbe exterioar econductorului.

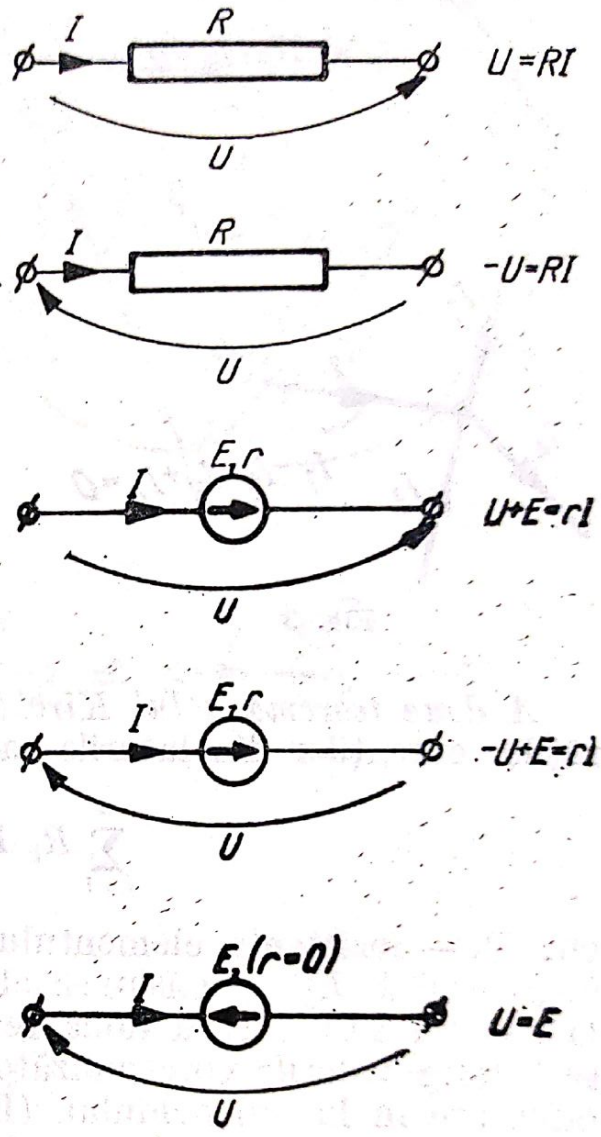


Fig. 2

Prima teoremă a lui Kirchhoff exprimă o relaţie între intensităţile curenţilor din laturile legate la un nod :

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0, \quad (11)$$

unde intensitatea curentului I_k din fiecare din laturile $k = 1, 2, \ldots, n$ legate la nod se exprimă algebric considerînd sensuri de referinţă la fel orientate faţă de nod. (Exemplificare în figura 3.)

Scanned with OKEN Scanner

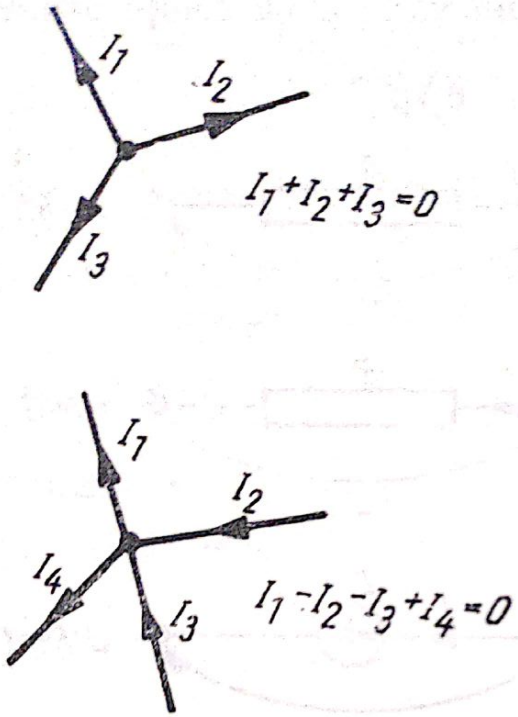


Fig. 3

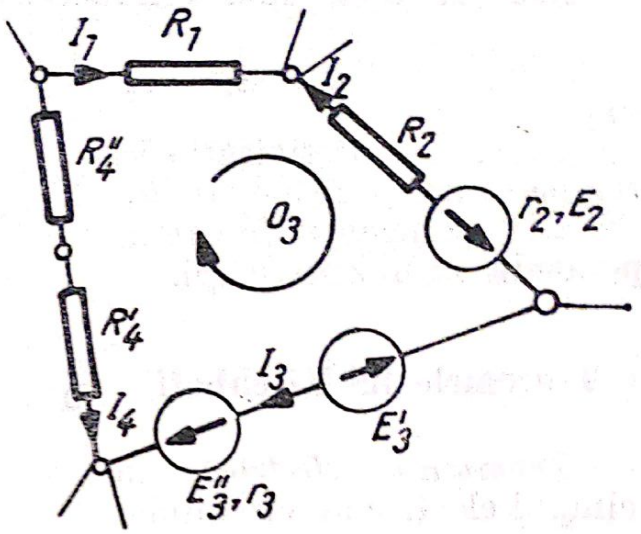


Fig. 4

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 - r_2 I_2 + r_3 I_3 - R_4' I_4 - R_4'' I_4 = E_2 - E_3' + E_3''$$

A doua teoremă a lui Kirchhoff exprimă o relaţie între intensităţilor curenţilor din laturile care formează o buclă (un ochi):

$$\sum_{k=1}^{n} R_k I_k = \sum_{k=1}^{n} E_k, \tag{12}$$

cu: R_k — rezistenţa elementului k, I_k — intensitatea curentului din elementul k, E_k — tensiunea electromotoare a elementului k.

O b s e r v a ţ i e. În a doua teoremă a lui Kirchhoff prin I_k şi E_k se înţeleg valorile corespunzătoare unor sensuri de referinţă la fel orientate în lungul ochiului. (Exemplificare în figura 4.)

Un sistem complet de ecuaţii pentru calculul curenţilor dintr-un circuit cu n noduri, o ochiuri şi L laturi se obţine scriind prima teoremă a lui Kirchhoff pentru $(n-1)$ noduri şi a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru fiecare din cele o ochiuri (fig. 5).

Circuite echivalente

În figura 6 se dau cele mai importante exemple de circuite echivalente, adică de circuite care au două cîte două aceeaşi relaţie între tensiune şi curent

$$U + E_e = R_e I, \tag{13}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu : R_e — rezistența echivalentă a circuitului, E_e — tensiunea electromotoare echivalentă a circuitului.

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0;\ -I_3 + I_4 + I_5 = 0$$
$$R_1 I_1 + r_2 I_2 = E_2;\ -r_2 I_2 + R_3 I_3 +$$
$$+ (R_4' + R_4'' R_4''' / R_4'') I_4 = E_2 - E_3;$$
$$(R_4' + R_4'' + R_4''') I_4 - R_5 I_5 = 0$$

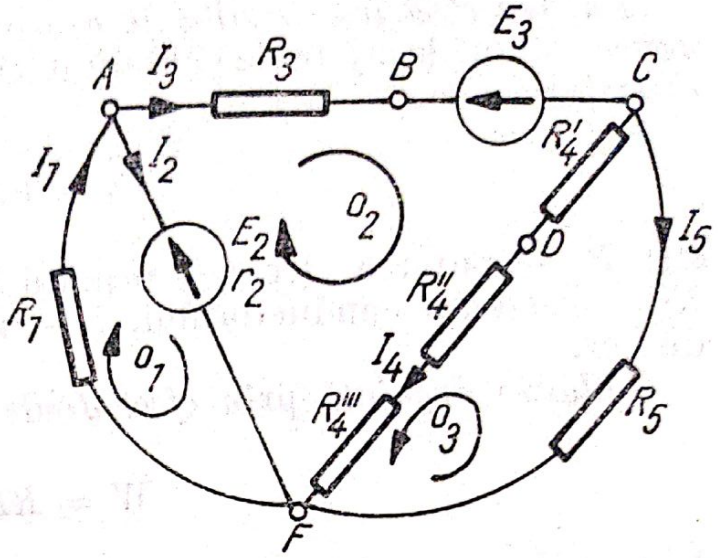


Fig. 5

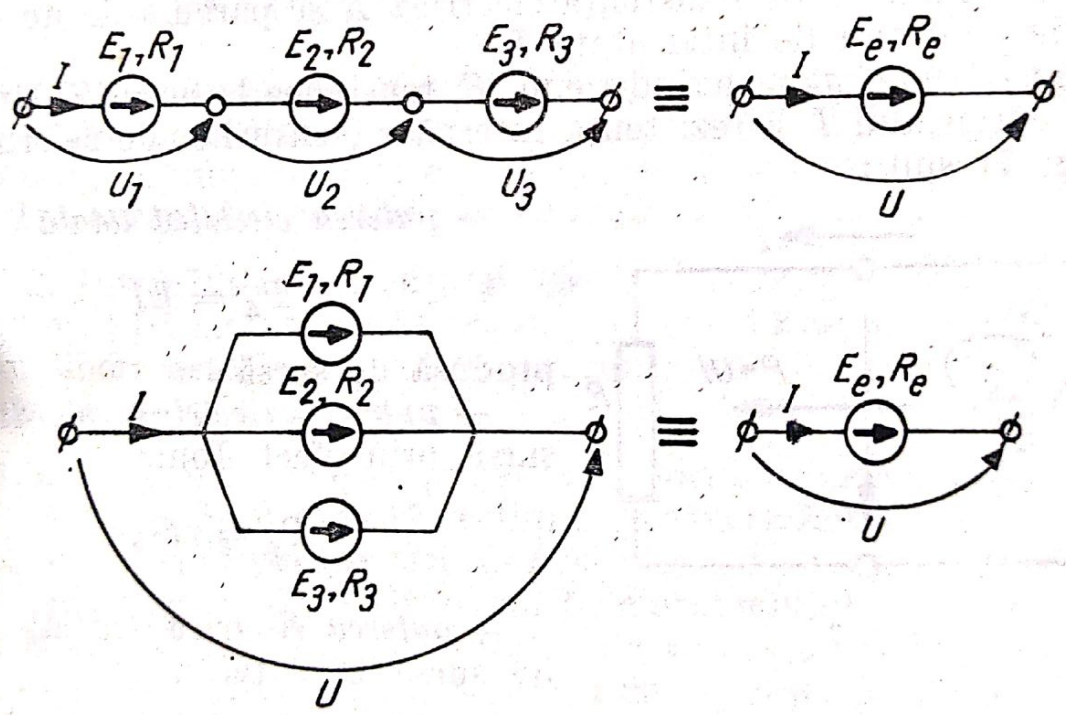


Fig. 6

În cazul particular al circuitelor formate din n elemente identice

$$R_{e,\ serie} = nR, \qquad E_{e,\ serie} = nE, \tag{14}$$

$$R_{e,\ paralel} = \frac{R}{n}, \qquad E_{e,\ paralel} = E \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Puteri și energii

Puterea electrică primită de un conductor prin efect Joule (proces ireversibil de degajare de căldură în conductoarele parcurse de curent electric)

$$P_J = RI^2, \tag{16}$$

cu: P_J — puterea electrică primită de conductor prin efect Joule, R — rezistența conductorului, I — intensitatea curentului din conductor.

Căldura degajată prin efect Joule

$$W = RI^2t, \tag{17}$$

unde W este căldura (energia) degajată prin efect Joule, în timpul t într-un conductor de rezistență electrică R și parcurs de un curent electric continuu de intensitate I.

Puterile unei surse având t.e.m. E, tensiunea la borne U, intensitatea curentului I și rezistența internă r (sensurile de referință ca în fig. 7) sînt:

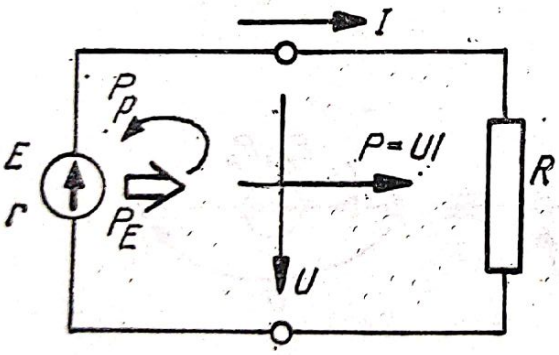


Fig. 7

— *puterea electrică totală*

$$P_E = EI \tag{18}$$

produsă de sursă;

— *puterea electrică pierdută* în sursă prin efect Joule

$$P_p = rI^2; \tag{19}$$

— *puterea electrică* (utilă) cedată de sursă în exterior

$$P = UI \tag{20}$$

(puterea la borne).

Puterile (18) și (20) sînt mărimi algebrice care pot fi pozitive sau negative.

Relația între cele trei puteri ale unei surse este

$$P_E = P_p + P. \tag{21}$$

Scanned with OKEN Scanner

Randamentul unei surse

$$\eta = \frac{P}{P_E}, \tag{22}$$

cu : P — puterea utilă a sursei, P_E — puterea totală a sursei.

Din (22), (18), (20) și din legea lui Ohm : $U = RI$, $-RI + E = rI$ se obține

$$\eta = \frac{U}{E} = \frac{R}{R + r}. \tag{23}$$

* * *

3.1. INTENSITATEA CURENTULUI ELECTRIC. DENSITATEA CURENTULUI ELECTRIC. ELECTROLIZA

3.1.1. Prin secțiunea transversală a unui conductor, de arie $A = 10\ mm^2$, trece uniform în același sens, în intervalul de timp $t = 0{,}5\ min$, un număr $n = 10^{22}$ de electroni liberi. Se cer : a) intensitatea I a curentului electric ; b) densitatea J a curentului electric.

3.1.2. Intensitatea curentului electric dintr-un conductor este $I = 6{,}3\ mA$. Diametrul conductrului este $d = 1\ mm$. Densitatea electronilor liberi este $n_0 = 2 \cdot 10^{22}$ nr. electroni/cm^3. Se cere viteza medie a electronilor liberi.

3.1.3. Un tub avînd o secțiune transversală de arie A este umplut cu un electrolit. Prin această secțiune transversală trec spre dreapta ionii pozitivi avînd fiecare sarcina Q și viteza v_+, iar spre stînga ionii negativi cu sarcina $-Q$ și viteza v_-. Numărul ionilor pozitivi, egal cu numărul ionilor negativi din unitatea de volum a electrolitului, este n_0. Să se scrie expresia intensității I a curentului electric și a densității J a curentului electric prin această secțiune a conductorului. Sensul de referință al curentului se va lua de la stînga la dreapta.

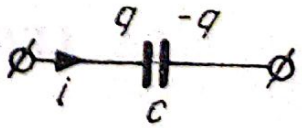


Fig. 3.1.4

3.1.4. Sarcina electrică a condensatorului reprezentat în figură are expresia $q = Qe^{-t/\tau}$. Se cere expresia intensității i a curentului din conductoarele legate la armăturile acestui condensator. Care este semnificația fizică a rezultatului obținut ?

3.1.5.* Izolația omogenă și izotropă a unui cablu coaxial este străbătută de un curent electric alternativ de intensitate $i = 6\pi \sin 2\pi\ 50\ t\mu$ A. Se cunosc lungimea $L = 10$ m a cablului, raza conductorului interior $r_i = 1$ mm și raza (interioară) a conductorului exterior $r_e = 4$ mm (v. figura). Să se determine : a) valoarea maximă J_m a densității curentului electric din izolație ; b) raportul dintre valorile densității curentului din izolație la suprafața conductorului interior și a celui exterior ; c) expresia densității curentului electric ca funcție de timp și de distanța r pînă la axa de simetrie a cablului.

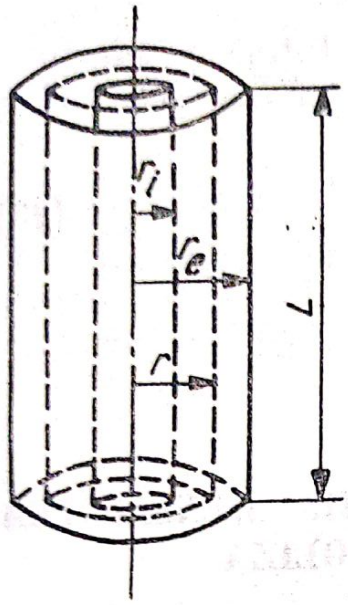


Fig. 3.1.5

3.1.6. Nichelul are masa atomică $A = 58{,}68\ \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ și valența $v = 2$. Ce intensitate are curentul electric care depune prin electroliză în timp de patru minute o cantitate de nichel cu masa $m = 338$ mg ?

3.1.7. Echivalentul electrochimic al cuprului este $k = 0{,}33$ mg/C. În cît timp se depune, prin electroliza unei soluții de sulfat de cupru, o cantitate de cupru cu masa $m = 1{,}2$ g ? Intensitatea curentului folosit este $I = 1{,}5$ A.

3.1.8. (R)* Care este grosimea stratului de cupru depus uniform prin electroliza unei soluții de sulfat de cupru pe un catod sferic în timp de o oră, dacă densitatea curentului electric la suprafața catodului este $J = 0{,}1$ A/cm^2 ? Se știe că raza sferei este mult mai mare decît grosimea stratului de cupru depus.

3.1.9. Care este eroarea relativă a unui ampermetru care, înseriat cu o baie electrolitică ce conține soluție apoasă de azotat de argint, indică un curent de 1,8 A în timpul de 10 minute în care se depune o cantitate de argint cu masa de 1,264 g ?

3.2. LEGEA LUI OHM. REZISTENȚA ELECTRICĂ

3.2.1. Ce lungime are un conductor de cupru, cu rezistivitatea $\rho = 0{,}017\ \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ și diametrul $d = 0{,}55$ cm, în care un curent de intensitate $I = 1$ A produce o cădere de tensiune $\Delta U = 1$ V ?

Scanned with OKEN Scanner

3.2.2. Un fir de cupru are masa $m = 7$ kg şi este parcurs de un curent de intensitate $I = 1$ A cînd i se aplică la capete o tensiune $U = 21{,}6$ V. Se ştie că densitatea cuprului este $d = 8{,}9$ kg/dm^3 şi rezistivitatea cuprului este $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m. Se cer : a) diametrul a al firului şi b) lungimea firului.

3.2.3. (R) Un receptor cu o rezistenţă electrică $R = 50\ \Omega$ trebuie alimentat de la o reţea cu tensiunea $U = 220$ V, situată la o distanţă $L = 45$ m de receptor. Valoarea maximă admisă pentru căderea de tensiune este de 3%. Care este diametrul minim al conductorului utilizat, dacă el se confecţionează din cupru?

3.2.4. Un rezistor de aluminiu are la temperatura $\theta_0 = 20°C$ o rezistenţă electrică $R_0 = 0{,}01\ \Omega$. Să se determine : a) valoarea rezistenţei la temperatura $\theta = 80°C$; b) creşterea relativă a rezistenţei cînd temperatura rezistorului creşte de la $\theta_0 = 20°C$ la $\theta_1 = 120°C$. Se dă coeficientul de temperatură al rezistenţei $\alpha_{Al} = 0{,}0036$.

3.2.5. O lampă electrică în condiţii normale de funcţionare, alimentată la tensiunea $U_n = 127$ V, absoarbe un curent de intensitate $I_n = 0{,}315$ A. Aceeaşi lampă, avînd o temperatură $\theta_0 = 20°C$, alimentată un timp scurt la o tensiune $U = 10$ V, este parcursă de un curent cu intensitatea $I = 0{,}256$ A. Filamentul lămpii este din wolfram şi are un coeficient de temperatură al rezistivităţii $\alpha = 0{,}0052 \dfrac{1}{\text{grd}}$. Se cere temperatura lămpii în condiţii de funcţionare normală.

3.2.6. (R)* Două fire conductoare au respectiv lungimile L_1, L_2, rezistenţele electrice R_1, R_2 şi rezistivităţile ρ_1, ρ_2, la temperatura $\theta_0 = 20°C$. Se cer rapoartele : a) diametrelor şi b) maselor lor. Se mai cere : c) raportul rezistenţelor conductoarelor cînd temperatura lor creşte la valoarea $\theta = 80°C$, dacă se neglijează modificarea diametrelor şi lungimilor, produsă de dilatarea termică ; d) să se arate că este neglijabilă eroarea relativă în calculul rezistenţei la o temperatură θ, dacă nu se consideră dilatarea termică (se va considera cazul conductoarelor de cupru).

3.2.7. Să se scrie relaţiile dintre tensiunea U, t.e.m. E, intensitatea curentului electric I şi rezistenţa r, ale unei surse, pentru sensurile de referinţă indicate în figură.

3.2.8. (R) O sursă cu t.e.m. $E = 100$ V şi rezistenţa internă $r = 0{,}05\ \Omega$ este parcursă de un curent electric cu intensitatea $I = 100$ A. Să se calculeze tensiunea U la bornele sursei.

Scanned with OKEN Scanner

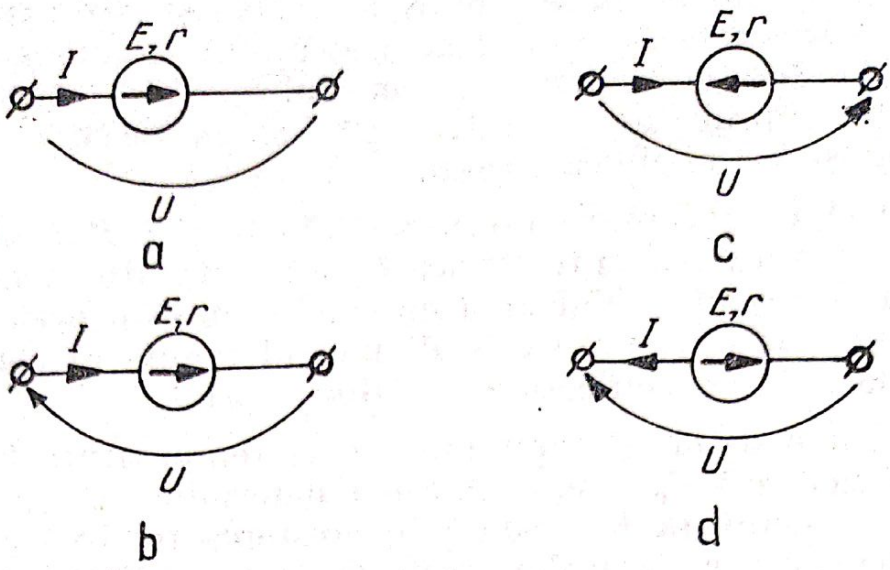


Fig. 3.2.7

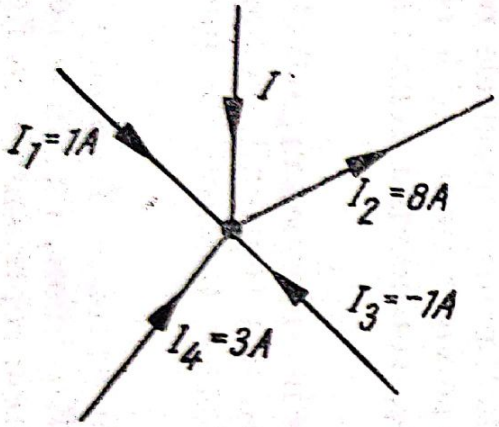
3.2.9.* O sursă are la funcţionarea în gol (bornele libere nelegate la vreun circuit exterior) o tensiune la borne U_g. Aceeaşi sursă, la funcţionarea în scurtcircuit (bornele legate printr-un conductor exterior de rezistenţă nulă, ceea ce de regulă ar produce defectarea sursei) debitează un curent electric de intensitate I_{sc}. Să se determine t.e.m. E a sursei şi rezistenţa ei internă r. Ce curent trece prin sursă dacă tensiunea ei la borne are valorile absolute : a) 0, 1 U_g; b) 1, 1 U_g?

3.2.10.* La o sursă se aleg sensuri de referinţă orientate în acelaşi sens pentru t.e.m., tensiune şi curent. Se cunosc, în două regimuri diferite de funcţionare, tensiunea la borne şi intensitatea curentului : (U_1, I_1), pentru un regim ; (U_2, I_2) pentru un al doilea regim. Se cer : a) t.e.m. E şi rezistenţa internă r ; b) intensitatea curentului I_0, dacă tensiunea la bornele sursei este U_0 ; c) condiţia pe care trebuie să o satisfacă mărimile date (U_1, U_2, I_1, I_2) pentru ca să existe o soluţie acceptabilă din punct de vedere fizic.

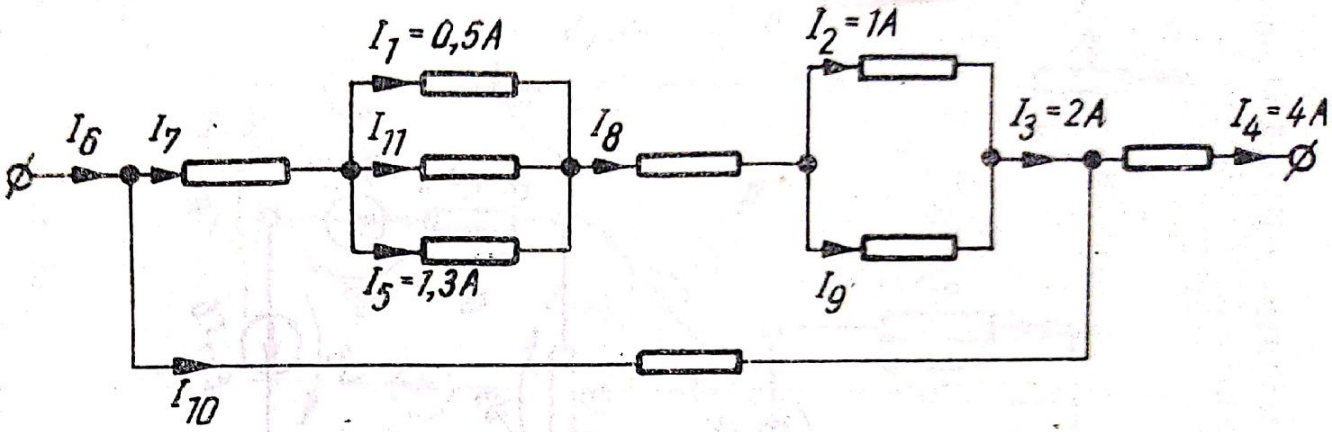
3.3. TEOREMELE LUI KIRCHHOFF

3.3.1. Să se determine intensităţile curenţilor necunoscuţi din circuitele reprezentate în figură. Să se interpreteze rezultatele.

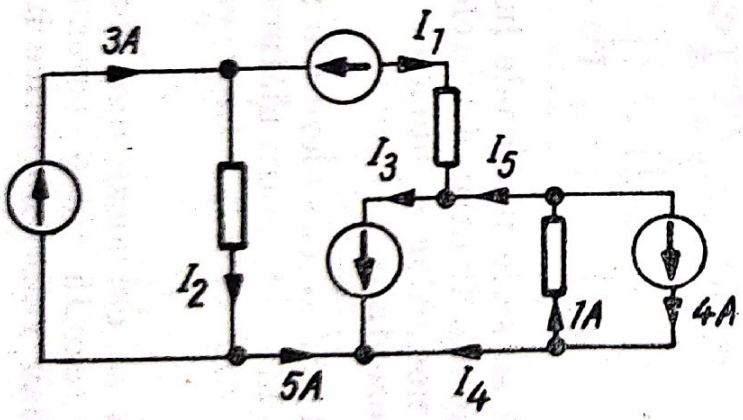
Scanned with OKEN Scanner



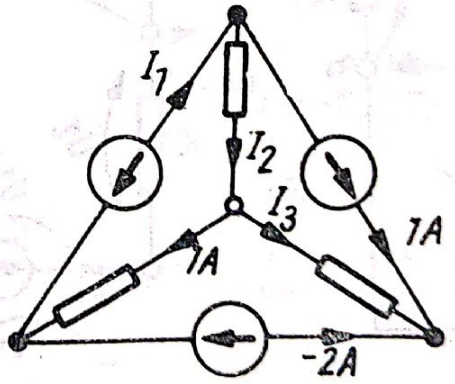
a



b



c



d

Fig. 3.3.1

Scanned with OKEN Scanner

3.3.2. Se dau circuitele serie reprezentate în figură și se cer : a) intensitatea curentului din fiecare circuit ; b) tensiunile la bornele elementelor din fiecare circuit.

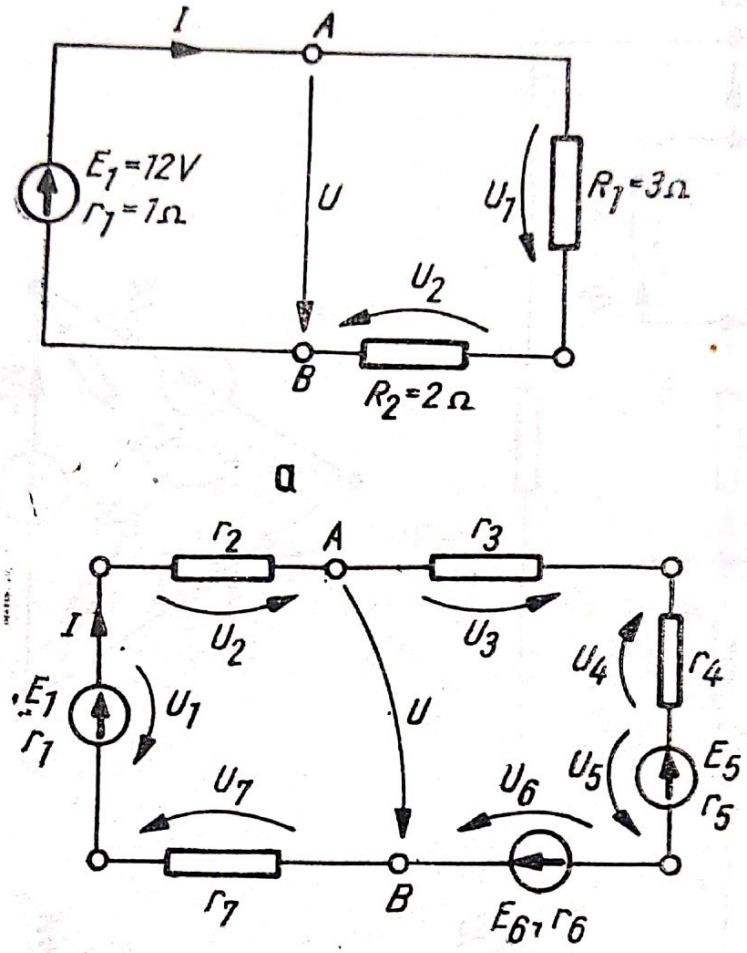


Fig 3.3.2

3.3.3. Să se scrie teoremele lui Kirchhoff pentru circuitele reprezentate în figură. Pentru circuitele *a* și *b* se vor scrie ecuațiile corespunzătoare nodurilor și buclelor indicate, considerînd sensurile de referință prezentate în figură.

3.3.4. (R) Să se calculeze din aproape în aproape curenții circuitului reprezentat în figura alăturată. Care sînt tensiunile la bornele elementelor din circuit? Care este valoarea tensiunii la bornele circuitului?

3.3.5. Să se calculeze din aproape în aproape, folosind cîte o ecuație care rezultă din o teoremă a lui Kirchhoff, mărimile pentru care nu se dau valori numerice în circuitele reprezentate în figură.

Scanned with OKEN Scanner

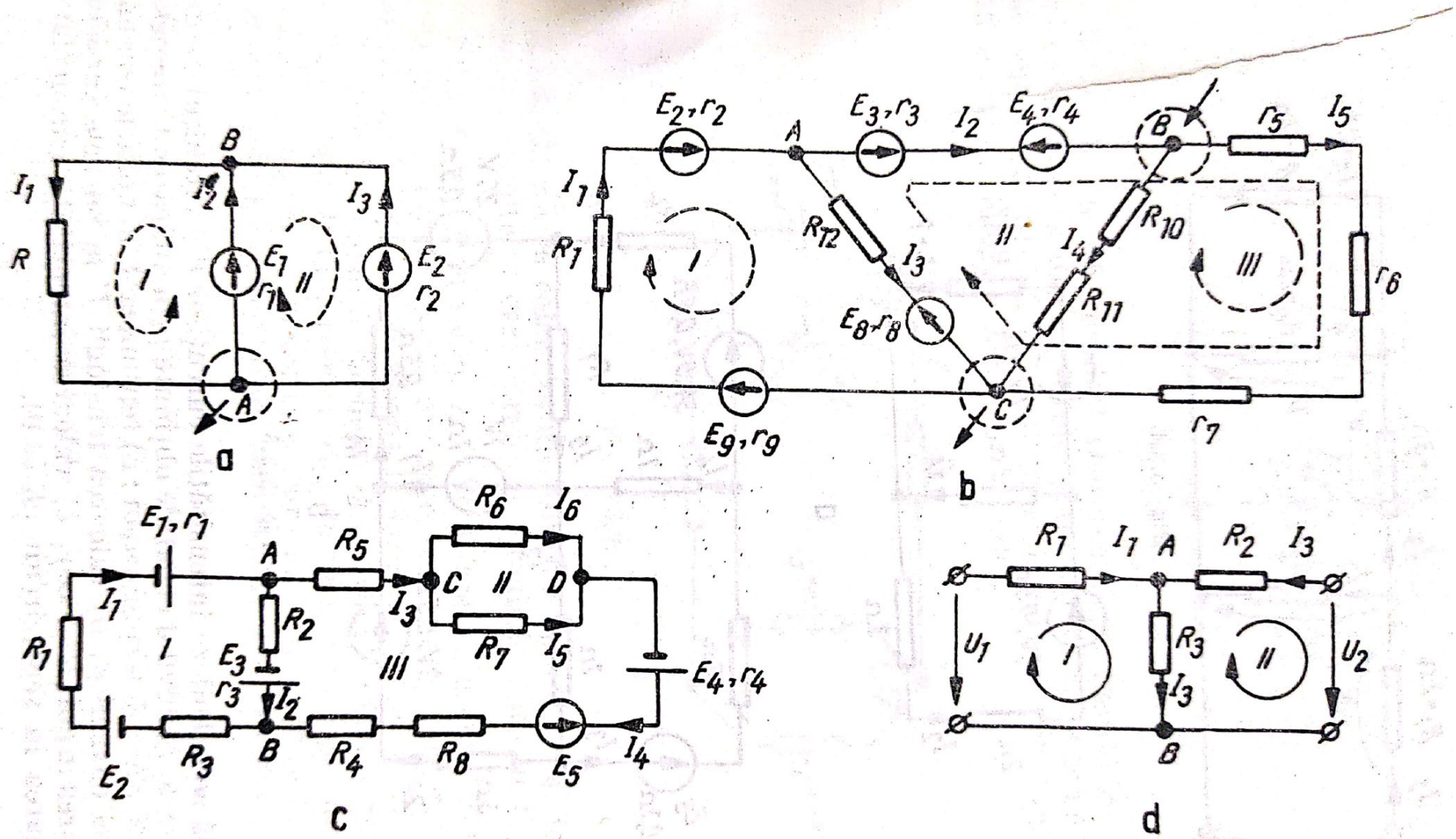


Fig. 3.3.3

Scanned with OKEN Scanner

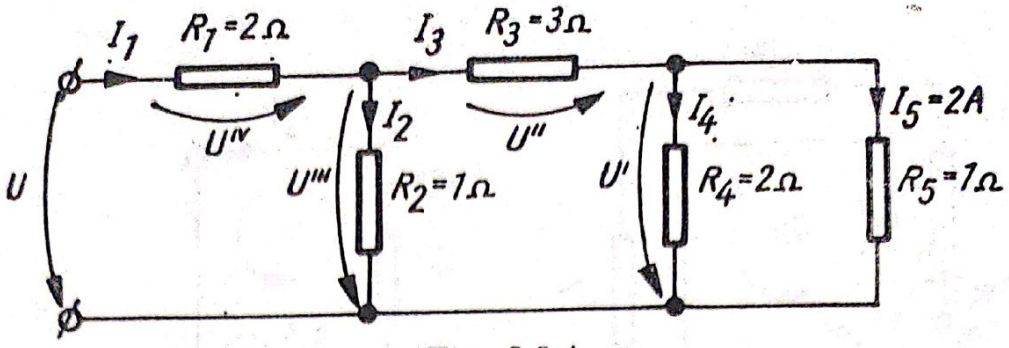
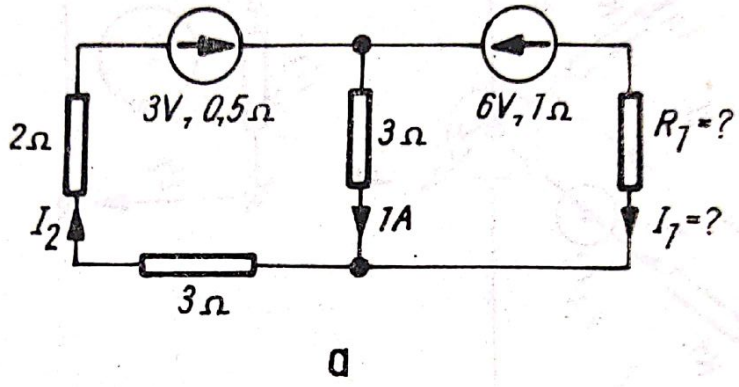
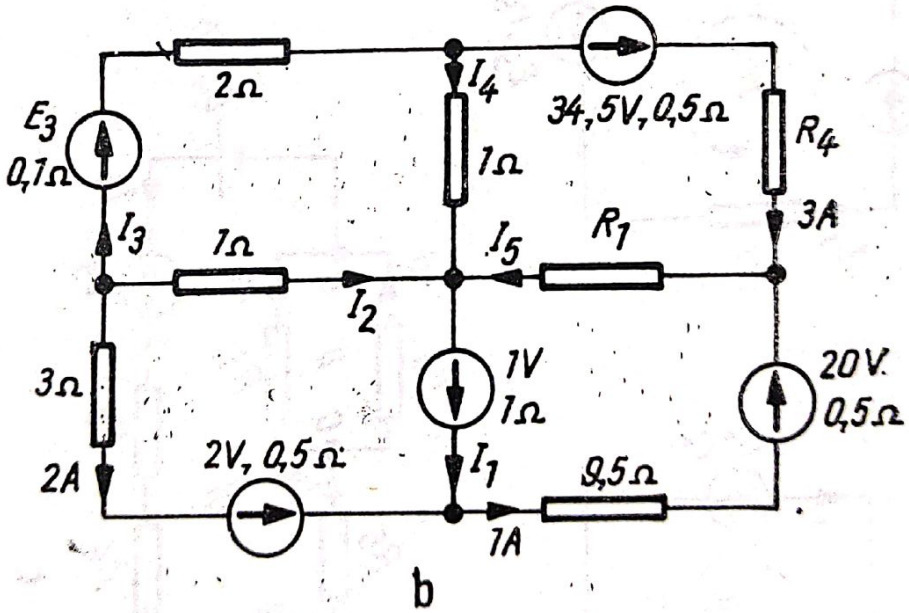


Fig. 3.3.4



a



b

Fig. 3.3.5

3.3.6. Să se calculeze intensităţile curenţilor din circuitul reprezentat în figură, rezolvînd ecuaţiile obţinute prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff. Să se determine apoi : a) tensiunea U la bornele comune ale celor trei elemente ; b) valoarea tensiunii U la bornele surselor, la funcţionarea în gol ($R \to \infty$) ; c) valoarea intensităţii curentului I la funcţionarea în scurtcircuit ($R = 0$).

Scanned with OKEN Scanner

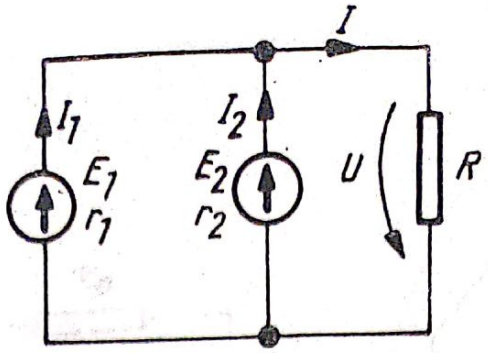


Fig. 3.3.6.

3.3.7. (R) Se dă circuitul reprezentat în figură. Se cere să se determine intensitatea curentului şi tensiunea la borne pentru fiecare element al circuitului, folosind simetria părţilor de circuit formate din elemente identice legate în paralel.

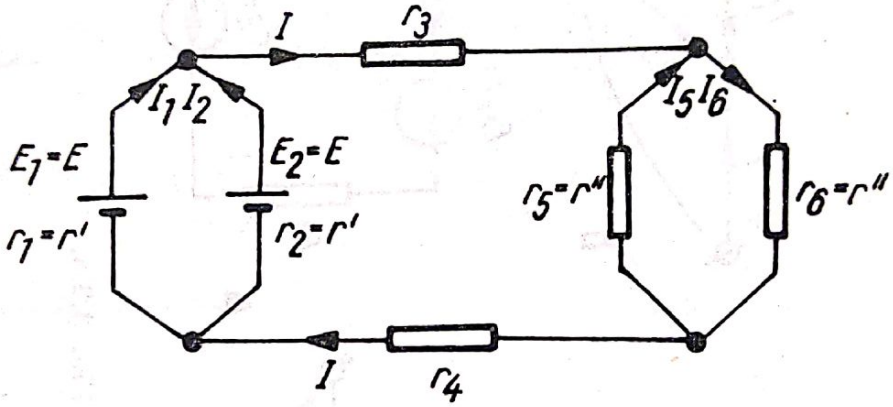


Fig. 3.3.7.

3.3.8. (I) Să se calculeze intensităţile curenţilor şi tensiunile la bornele elementelor care formează circuitele date în figură.

3.3.9. O sursă cu t.e.m. $E = 24$ V are un curent de scurtcircuit $I_{sc} = 60$ A. Ce rezistenţă are receptorul care, conectat la bornele acestei surse, face ca tensiunea la borne să fie $U = 22$ V?

3.3.10.* Ce condiţie trebuie să satisfacă două surse legate în paralel (v. fig. 3.3.6), pentru ca prin rezistorul legat la bornele lor să nu treacă curent electric, oricare ar fi rezistenţa acestuia? (Se consideră finite şi diferite de zero rezistenţele interne şi t.e.m. ale surselor).

3.3.11. O baterie de acumulatoare este alcătuită prin legarea în paralel a două acumulatoare cu t.e.m. $E_1 = 2{,}2$ V; $E_2 = 2{,}1$ V şi rezistenţele interne $r_1 = 0{,}2\ \Omega$; $r_2 = 0{,}1\ \Omega$. Care este curentul de scurtcircuit ce ar trece printr-un conductor de rezistenţă neglijabilă, care ar lega cele două borne ale bateriei?

Scanned with OKEN Scanner

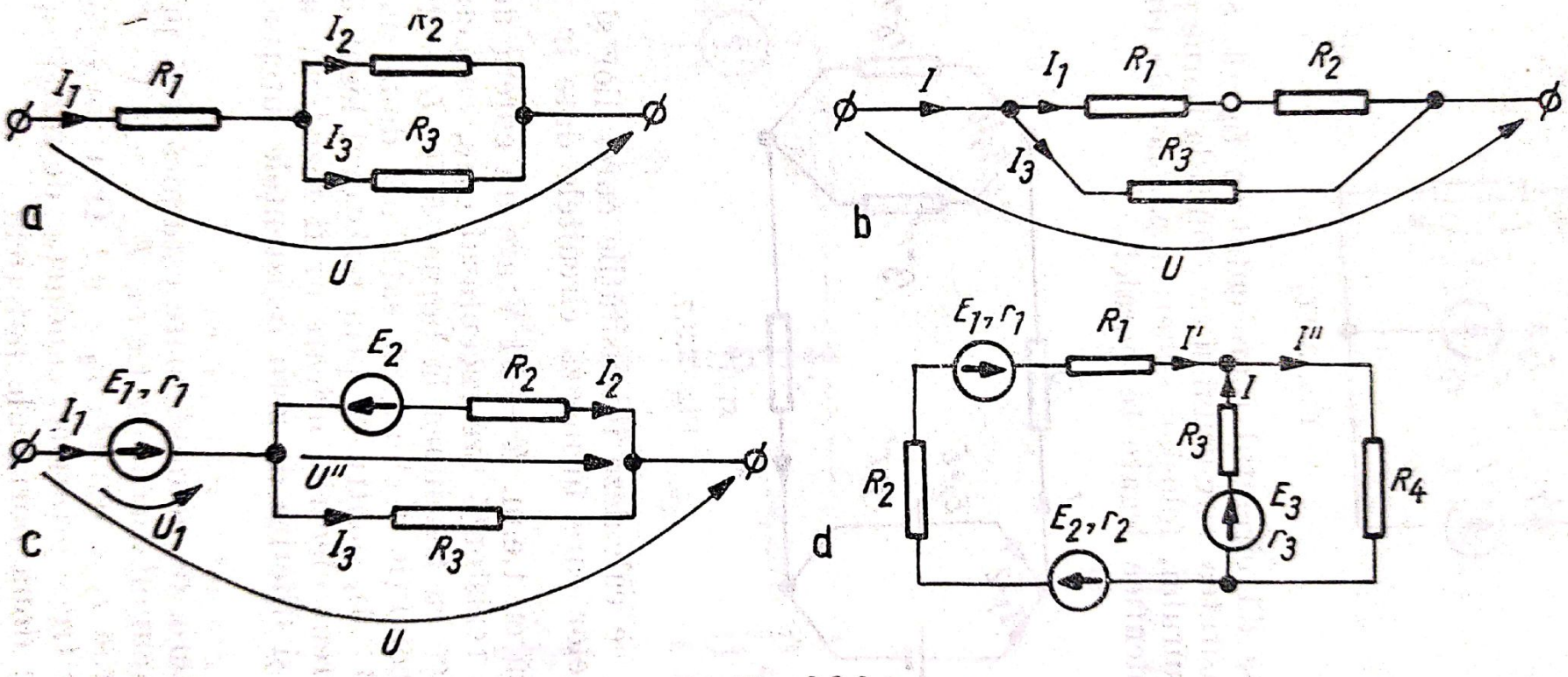


Fig. 3.3.8.

Scanned with OKEN Scanner

3.3.12. Care este tensiunea între punctele A şi B ale circuitelor reprezentate în figura 3.3.2? Ce curent ar trece printr-un conductor care ar scurtcircuita aceste puncte?

3.3.13. La circuitul reprezentat în figură se cunosc tensiunea indicată de voltmetru $U_v = 24$ V, rezistenţa interioară a sursei $r = 0{,}2\ \Omega$ şi rezistenţa receptorului $R = 6\ \Omega$. Curentul absorbit de voltmetru şi căderea de tensiune în ampermetru sînt neglijabile. Se cer: a) intensitatea curentului prin sursă; b) t.e.m. a sursei; c) indicaţiile celor două aparate de măsurat, dacă se scurtcircuitează bornele receptorului.

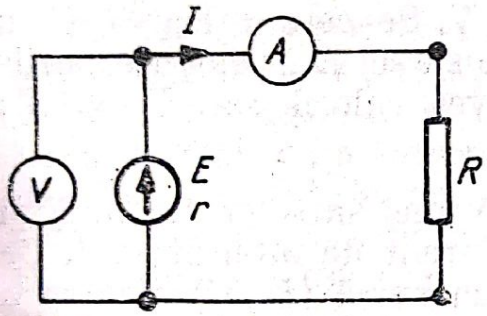


Fig. 3.3.13.

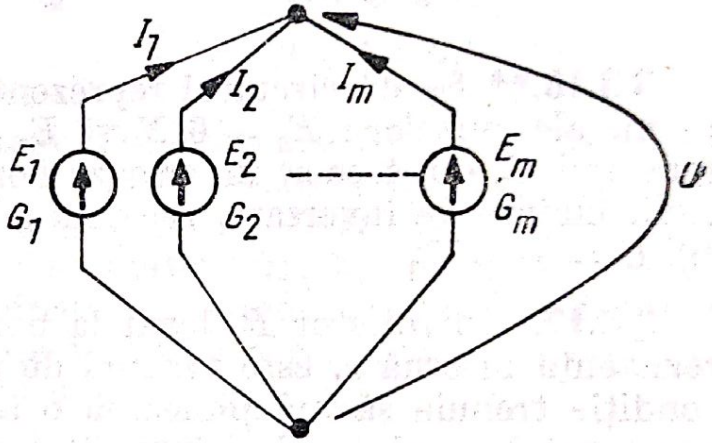


Fig. 3.3.14.

3.3.14. (R)* Să se deducă formula

$$U = \frac{\sum_{k=1}^{m} G_k E_k}{\sum_{k=1}^{m} G_k},$$

care exprimă tensiunea U între cele două noduri ale unui circuit paralel (fig. 3.3.14) cu m laturi, de conductanţă $G_k = \dfrac{1}{R_k}$ şi t.e.m. E_k, cu $k = 1, 2, \ldots, m$.

3.3.15. Se dă circuitul reprezentat în figură, cu $E_1 = 6$ V, $E_2 = 2$V; $r_1 = 0{,}5\ \Omega$, $r_2 = 0{,}25\ \Omega$. Să se determine valoarea rezistenţei R pentru care circuitul I_2 din a doua sursă este nul. Ce condiţie trebuie să satisfacă t.e.m., pentru ca să existe în general o soluţie a problemei?

Scanned with OKEN Scanner

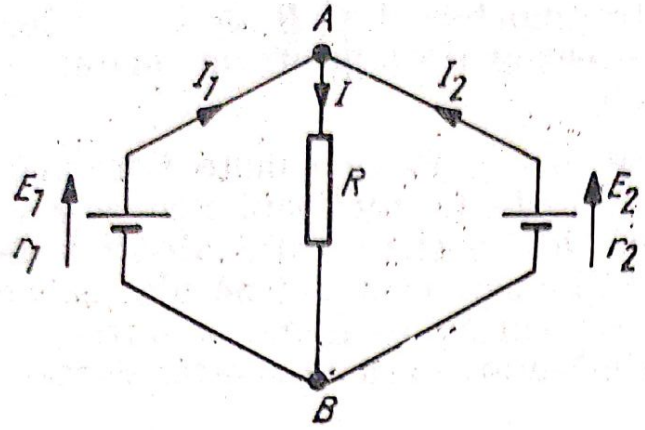


Fig. 3.3.15.

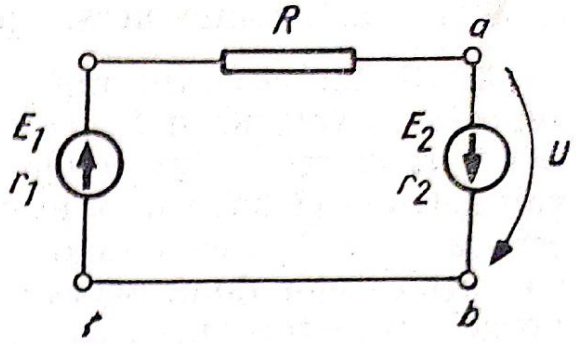


Fig. 3.3.16.

3.3.16.** Se dă circuitul reprezentat în figură, la care se cunosc t.e.m. ale surselor: $E_1 = 6$ V şi $E_2 = 4$ V. Se cere valoarea U' a tensiunii U, după ce se inversează bornele sursei E_2, pentru cazurile cînd, înainte de inversare, tensiunea U avea valorile: a) $U = 3$ V; b) $U = -3$ V.

3.3.17. Un rezistor R, legat la bornele unei surse cu t.e.m. E şi rezistenţa internă r, este parcurs de un curent de intensitate I. Ce condiţie trebuie să îndeplinească o a doua sursă (E', r'), pentru a putea mări cu ajutorul ei intensitatea curentului din rezistorul R? Se consideră: a) înlocuirea primei surse cu a doua sursă; b) legarea celei de a doua surse în serie cu prima sursă; c) legarea primei surse în paralel cu a doua.

3.3.18. (R)* Ce condiţie trebuie să îndeplinească o sursă pentru ca, legînd-o în serie într-un circuit format din n surse înseriate cu un rezistor şi parcurs de curentul I, să mărească intensitatea curentului?

3.3.19.** Ce condiţie trebuie să îndeplinească o sursă pentru ca, legînd-o în paralel cu n surse legate la bornele unui rezistor, să se mărească intensitatea curentului şi deci tensiunea la bornele rezistorului?

3.3.20. Două surse sînt legate în paralel, aşa cum se indică în figură. Se cunosc $E_1 = 20$ V, $E_2 = 18$ V şi $r_1 = 0{,}4\ \Omega$, $r_2 = 0{,}2\ \Omega$. Se cer: a) curentul total I dacă tensiunea la bornele surselor este $U = 16$ V; b) tensiunea U dacă curentul total ar fi $I = -16$ A.

3.3.21.* În circuitul reprezentat în figură se cunosc potenţialele nodurilor A, B, C, D şi rezistenţele rezistoarelor. Se cere potenţialul nodului O şi curentul din rezistoare.

Scanned with OKEN Scanner

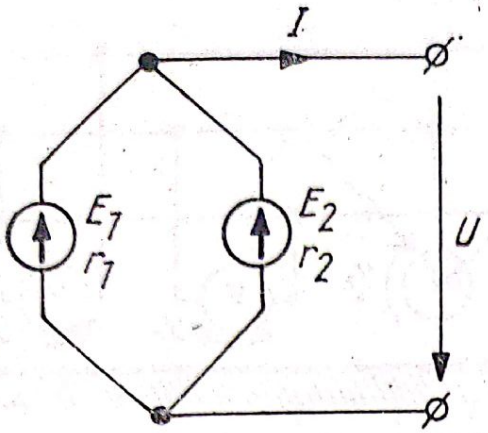


Fig. 3.3.20.

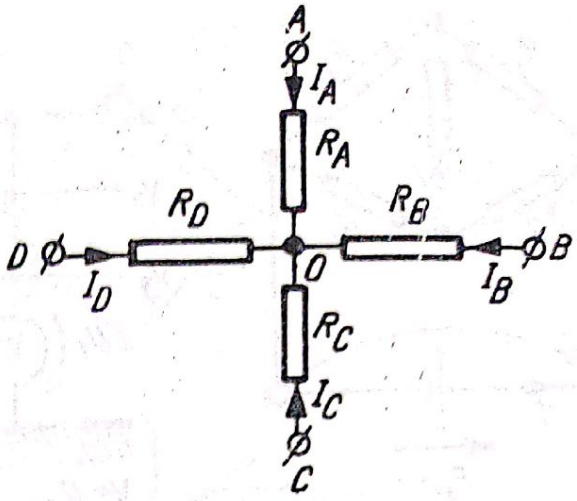


Fig. 3.3.21.

3.3.22. Considerînd la un acumulator un acelaşi sens de referinţă pentru mărimile U, I, E, relaţia dintre intensitatea curentului ce-l parcurge şi tensiunea la bornele sale este $I = 4U + 16$. Se cer : a) t.e.m. şi rezistenţa internă a acumulatorului ; b) tensiunea la mers în gol şi curentul său de scurtcircuit ; c) curentul ce l-ar debita acest acumulator dacă la bornele sale s-ar lega o rezistenţă $R = 0{,}75\ \Omega$. Care este în acest caz tensiunea la bornele sale ?

3.3.23. (R) Un acumulator debitează un curent de 12 A. Dacă se măreşte cu 50% rezistenţa conectată la bornele acumulatorului curentul debitat se micşorează cu 25%. Care ar fi intensitatea curentului dacă în loc să se mărească rezistenţa sa externă ea s-ar micşora cu 25% ?

3.3.24. Cele două surse din circuit (vezi figura) sînt identice şi cele două rezistoare au rezistenţele $R_1 = 2\Omega$, respectiv $R_2 = 4\ \Omega$. Se dau tensiunile la bornele surselor $u_1 = 10$ V şi $u_2 = 6$ V. Se cer t.e.m. ale surselor şi rezistenţele lor interne.

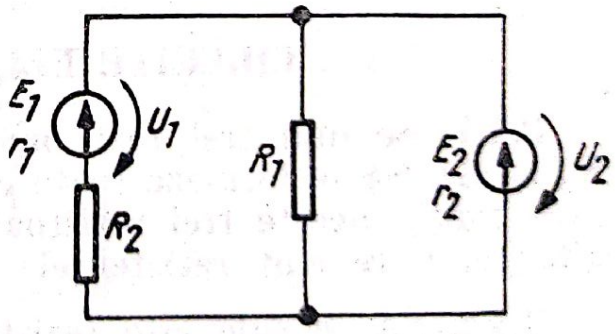


Fig. 3.3.24.

3.3.25. Se dă circuitul reprezentat în fig. la care se cunosc $E = 29$ V, $r = 0{,}5\ \Omega$, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 3\Omega$. Se cer : a) tensiunea la bornele sursei ; b) intensităţile curenţilor.

3.3.26. Cele trei fire conductoare au respectiv potenţialele $V_1 = 220$ V, $V_2 = 100$ V, $V_3 = 150$ V. Pămîntul are potenţialul de

Scanned with OKEN Scanner

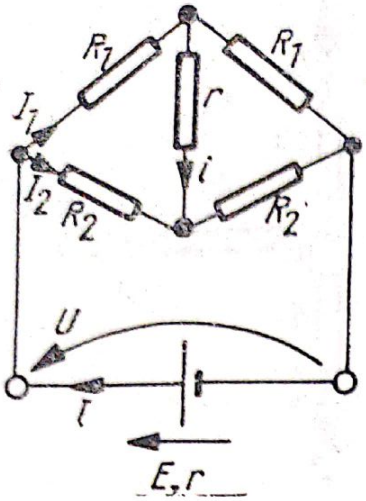


Fig. 3.3.25.

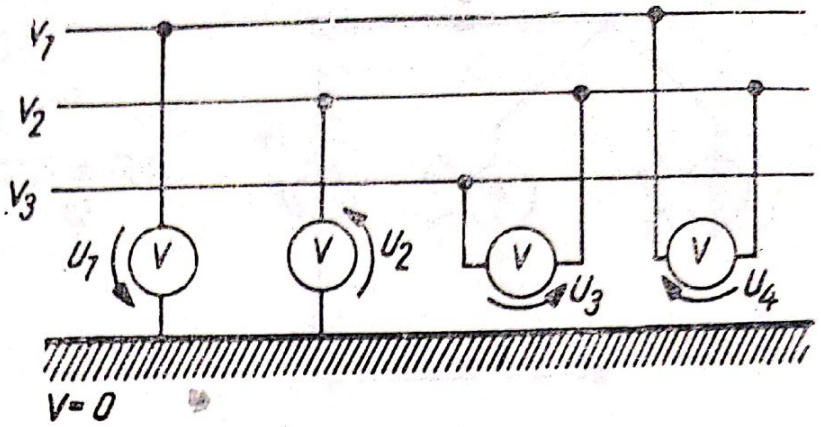


Fig. 3.3.26.

referință $V = 0$. Să se determine tensiunile (ca valori algebrice) măsurate de voltmetre.

3.3.27. În circuitul indicat în figură rezistențele cunoscute sînt $R_2 = 4\Omega$ și $R_3 = 2\,\Omega$. Să se calculeze valoarea rezistenței R_1 știind că întregul circuit ia un curent $I = 14$ A și rezistorul R_2 e parcurs de un curent $I_2 = 2$ A.

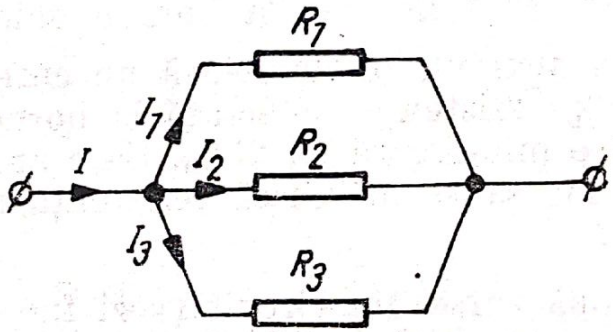


Fig. 3.3.27

3.4. CIRCUITE ELECTRICE ECHIVALENTE

3.4.1. Se dau trei rezistoare cu rezistențele $R_1 = R_3 = 4\Omega$ și $R_2 = 3\Omega$. Să se formeze toate circuitele serie, paralel și serie-paralel care conțin aceste trei rezistoare și care au rezistențe echivalente diferite. Care sînt rezistențele echivalente ale acestor circuite?

3.4.2. Să se calculeze rezistențele echivalente R_{AB}, R_{AC}, R_{AD}, unde indicii corespund bornelor considerate în circuitele reprezentate în figură.

3.4.3. Să se calculeze rezistența echivalentă a circuitului reprezentat în figură.

Scanned with OKEN Scanner

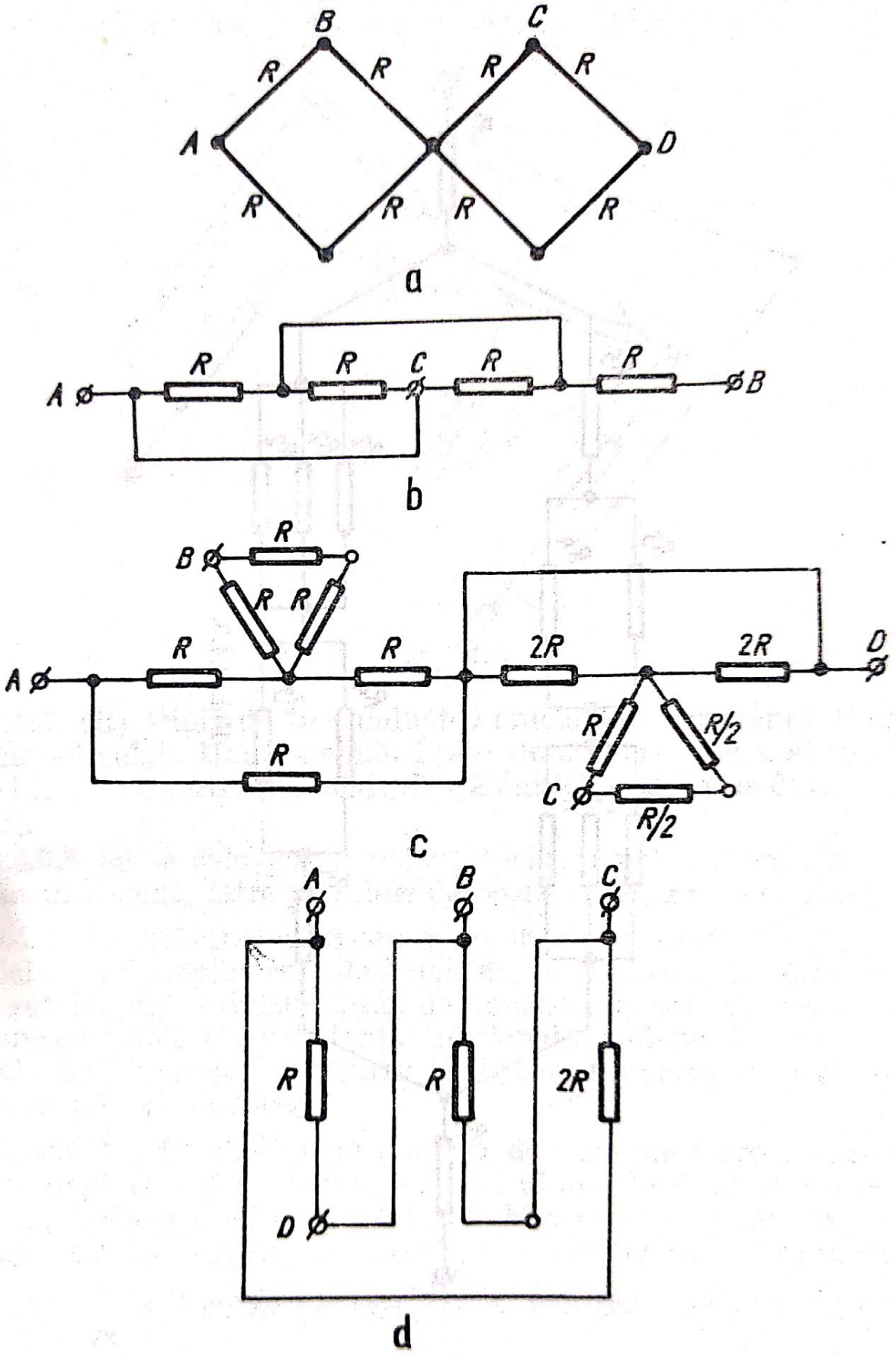


Fig. 3.4.2.

Scanned with OKEN Scanner

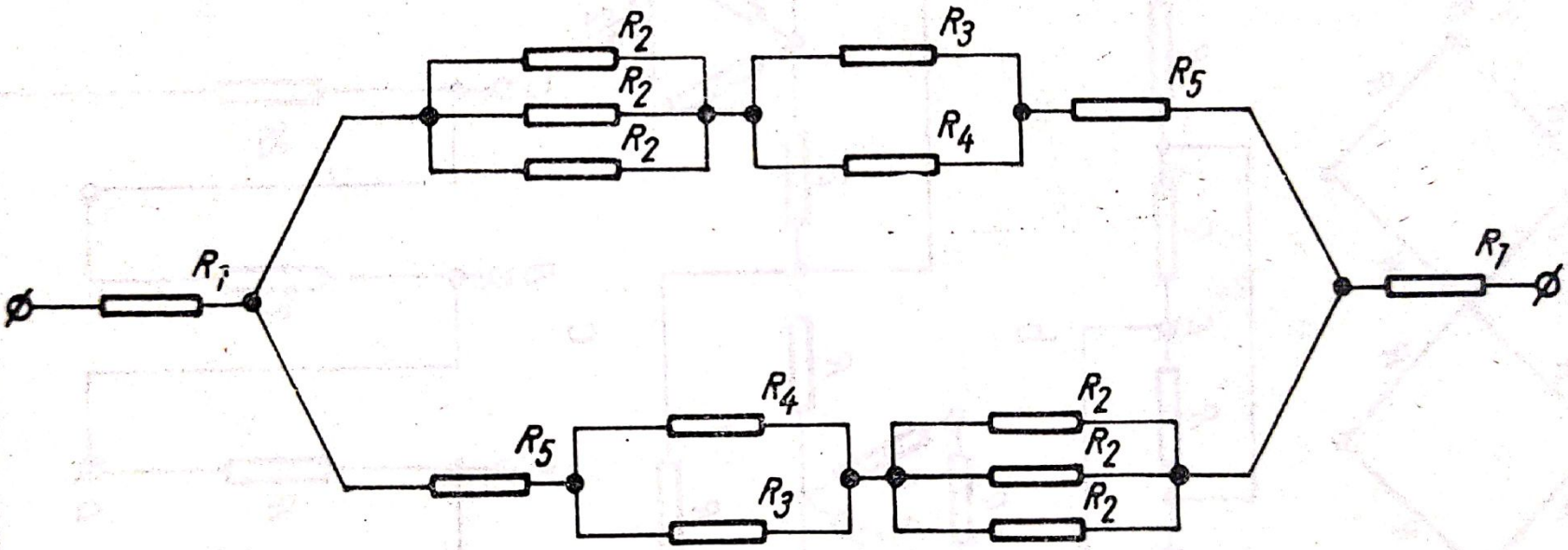


Fig. 3.4.3.

3.4.4.* Toate rezistenţele circuitului din figură sînt egale cu $R = 25\ \Omega$. Care este rezistenţa echivalentă a circuitului?

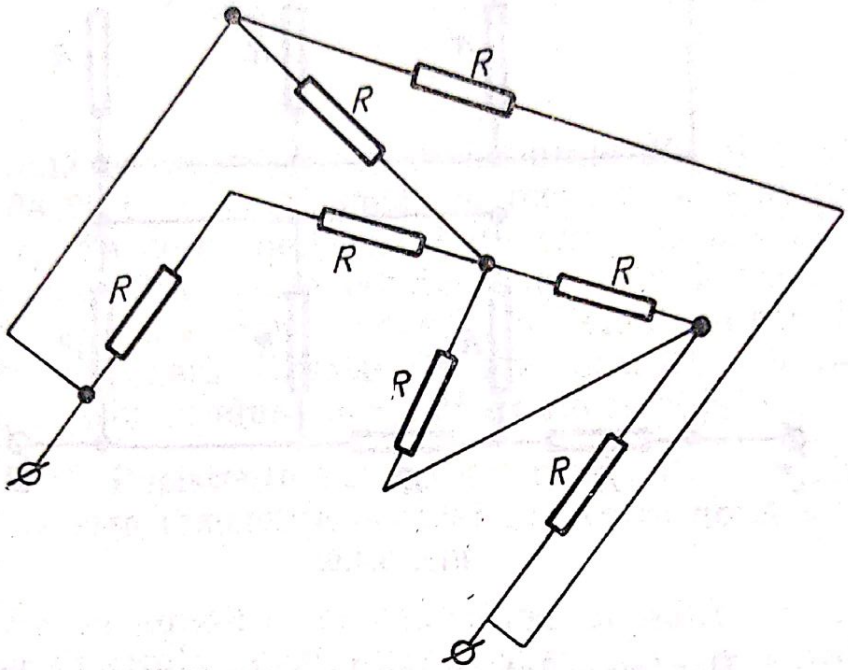


Fig. 3.4.4.

3.4.5. (R) Dintr-un fir conductor omogen de rezistenţă R se face un inel circular. Unde trebuie lipite două borne pe inel pentru a avea între ele o rezistenţă echivalentă dată R_e. Discuţie după valorile lui R_e.

3.4.6.* Să se calculeze rezistenţa echivalentă a circuitului reprezentat în schemă, între perechile de borne: AB, BC, AC, AD şi BD.

3.4.7. Un galvanometru are o rezistenţă internă $R = 190\ \Omega$. În paralel cu galvanometrul de leagă un şunt obţinîndu-se un aparat cu o sensibilitate (diviziuni/μA) de douăzeci de ori mai mică decît a galvanometrului. Ce rezistenţă adiţională trebuie legată în serie cu galvanometrul şuntat pentru a obţine un aparat cu o rezistenţă (echivalentă) $R' = 100\ \Omega$?

3.4.8.* Un fir conductor omogen de lungime l are o rezistenţă R. Ce lungime x are o bucată de fir, tăiată de la unul din capete, care legată în paralel cu o porţiune de aceeaşi lungime de pe firul rămas, face ca rezistenţa echivalentă la capetele firului rămas să fie $R_e = \frac{R}{m}$? Pentru ce lungime x rezistenţa echivalentă este:

a) maximă;

b) minimă?

Scanned with OKEN Scanner

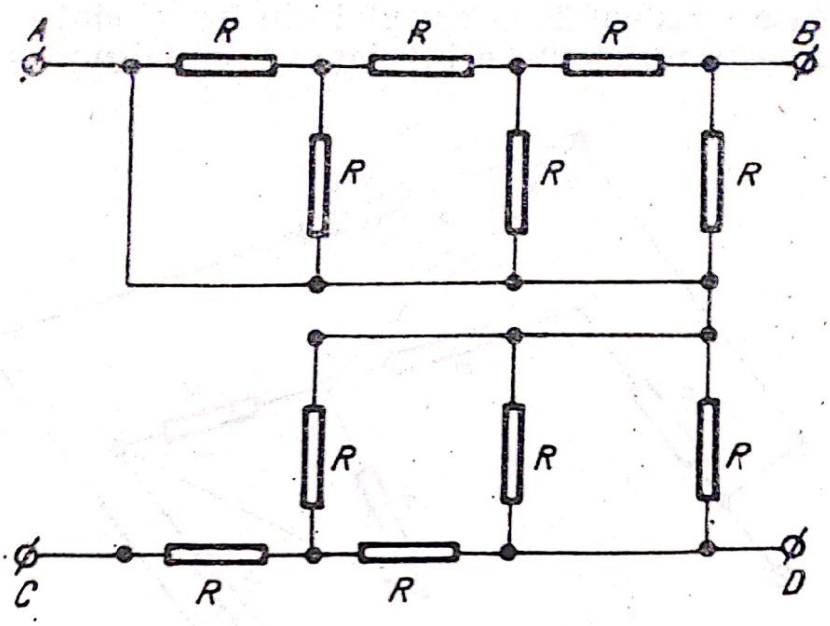


Fig. 3.4.6.

3.4.9. (R)** Pentru a determina locul în care este defectă izolaţia dintre cele două fire conductoare ale unei linii telefonice se aplică la începutul liniei o tensiune $U = 28$ V. Curentul măsurat la începutul liniei este $I_0 = 2$ A respectiv, $I_{sc} = 3{,}52$ A după cum sfîrşitul liniei este în gol respectiv în scurtcircuit.

Se ştie că fiecare din firele liniei are o lungime de $L = 4$ km şi o rezistenţă $\frac{r}{2} = 6\ \Omega$. Se cere distanţa L' de la începutul liniei pînă la locul defectului şi rezistenţa R a izolaţiei defecte. Se mai cere discuţia rezultatului literal şi a metodei utilizate.
(Indicaţie : se neglijează curentul electric de conducţie ce trece prin izolaţia nedefectată).

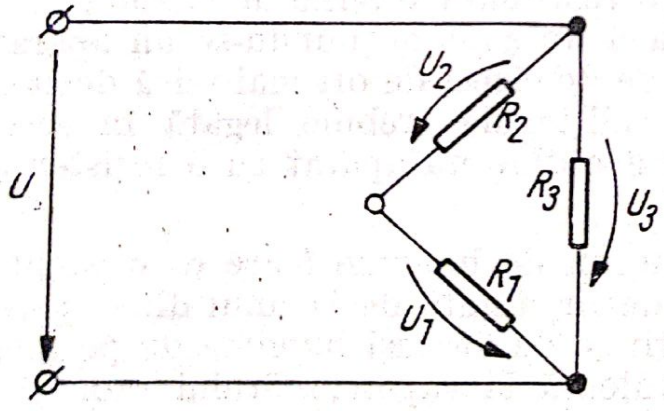


Fig. 3.4.10.

3.4.10.**. Circuitul reprezentat în figură este alimentat cu o tensiune constantă U. Nu se cunosc rezistenţele R_1, R_2, R_3 ale rezistoarelor. Se ştie că un voltmetru cu o rezistenţă internă necunoscută R_V, conectat pe rînd la bornele rezistoarelor R_1, R_2, R_3, măsoară respectiv tensiunile

Scanned with OKEN Scanner

$U_1 = 9$ V, $U_2 = 18$ V, $U_3 = 45$ V. Se cer : a) erorile absolute ΔU și relative γ, la măsurarea acestor trei tensiuni ; b) valorile adevărate ale tensiunilor la bornele celor trei rezistoare. (Indicație : eroarea absolută este $\Delta U = U_{măsurat} - U_{adevărat}$; eroarea relativă este $\gamma = \frac{U}{U_{adevărat}}$).

3.4.11.* Două conductoare au rezistențele R_{01} respectiv R_{02}, la temperatura de 20°C, și coeficienții de temperatură ai rezistențelor α_1 respectiv α_2. Se cere coeficientul de temperatură al rezistenței circuitelor formate din aceste conductoare prin legarea lor în : a) serie, b) în paralel. Ce valoare au acești coeficienți în cazul particular $R_{01} = R_{02}$. Se consideră variații de temperatură $\Delta\theta$ pentru care termenii care conțin produse $\alpha_1\alpha_2\Delta\theta^2$ să fie neglijabili.

3.4.12. (R)*** Rezistențele muchiilor unui cub au toate o aceeași valoare R. Care este rezistența echivalentă între două vîrfuri opuse ale cubului ?

3.4.13.** Se dă circuitul cu conexiune în punte reprezentat în figură. Să se determine rezistența echivalentă a acestui circuit calculînd în prealabil, pe baza teoremelor lui Kirchoff, curentul I în funcție de U. Se mai cere curentul i din diagonala r a punții și condiția pe care trebuie să o satisfacă rezistențele R_1, R_2, R_3, R_4 pentru ca acest curent să fie nul, oricare ar fi valoarea lui U (condiția de echilibru a punții). Care sînt valorile rezistenței echivalente a circuitului dacă : a) este satisfăcută condiția de echilibru ; b) $r = 0$ (puntea de scurtcircuit) ; c) $r = \infty$ (puntea în gol).

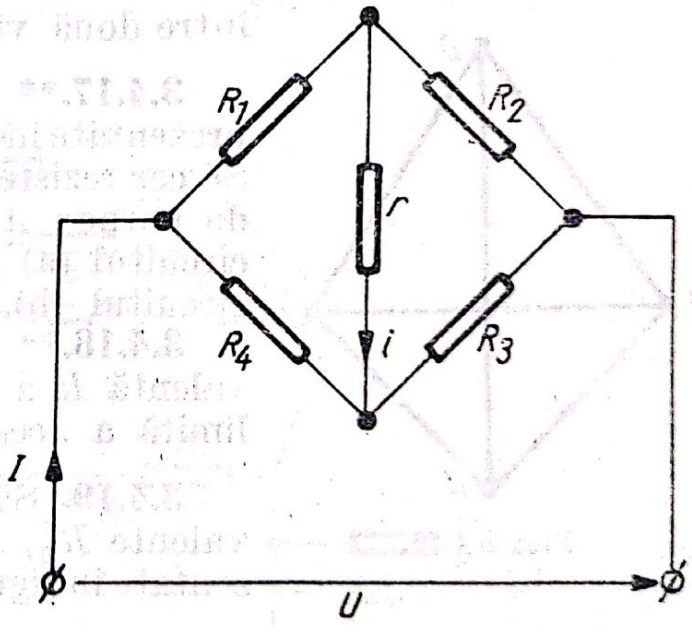


Fig. 3.4.13.

3.4.14.* Să se calculeze rezistența echivalentă a circuitului între bornele : a) $A - B$; b) $A - C$; c) $A - E$.

3.4.15.** Se dă circuitul hexagonal reprezentat în figură. Firele au toate aceeași rezistență R. Se cer rezistențele echivalente : R_{AB}, R_{AC}, R_{AD}, R_{AO}.

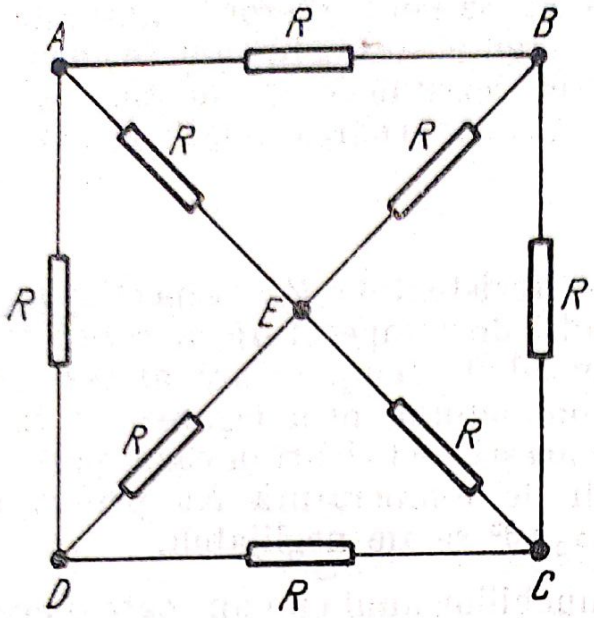


Fig. 3.4.14.

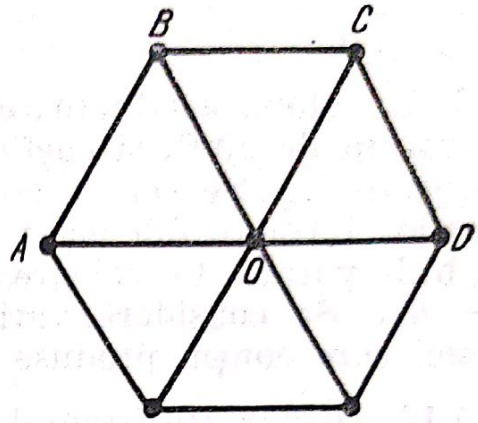


Fig. 3.4.15.

3.4.16. (R)* Muchiile unui tetraedru regulat sînt formate din fire de aceeaşi rezistenţă R. Să se calculeze rezistenţa tetraedrului între două vîrfuri opuse ale acestuia.

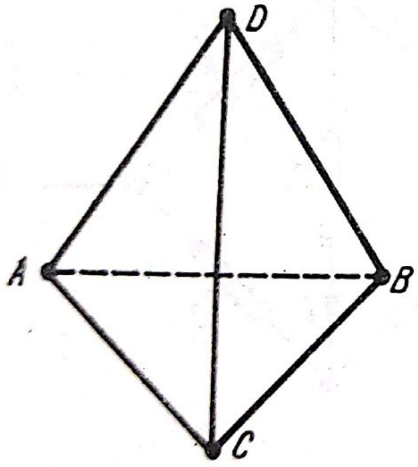


Fig. 3.4.16.

3.4.17.** Fiecare fir din circuitele reprezentate în figură are rezistenţa $R = 55\ \text{m}\Omega$. Se cer rezistenţele echivalente între perechile de borne: $A - B$, $A - C$, şi $A - D$, pentru circuitul (a) şi între bornele $A - B$ pentru circuitul (b).

3.4.18.** Să se calculeze rezistenţa echivalentă R a circuitelor. Care este valoarea limită a acestor rezistenţe pentru $n \to \infty$.

3.4.19. Să se calculeze rezistenţele echivalente R_{e1}, R_{e2}, R_{e3}, ale circuitelor reprezentate în figură pentru $R_1 = 12\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$.

3.4.20. (R)*** Care sînt valorile rezistenţelor echivalente din problema precedentă în cazul cînd numărul n al circuitelor (legate în lanţ) tinde spre infinit?

3.4.21. Să se calculeze rezistenţele R_0 care legate la bornele de ieşire $2'-2''$ corespund (figura 3.4.19) unor rezistenţe echivalente R_e la bornele de intrare $1'-1''$, egale chiar cu R_e. (Aceste rezistenţe R_e pentru care $R_e = R_e$ se numesc rezistenţe caracteristice).

Scanned with OKEN Scanner

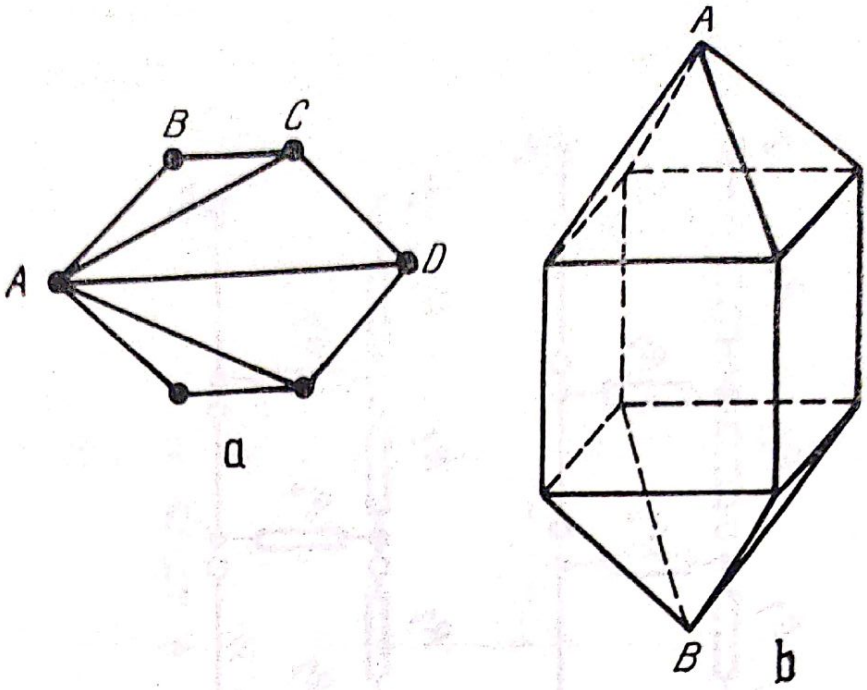


Fig. 3.4.17.

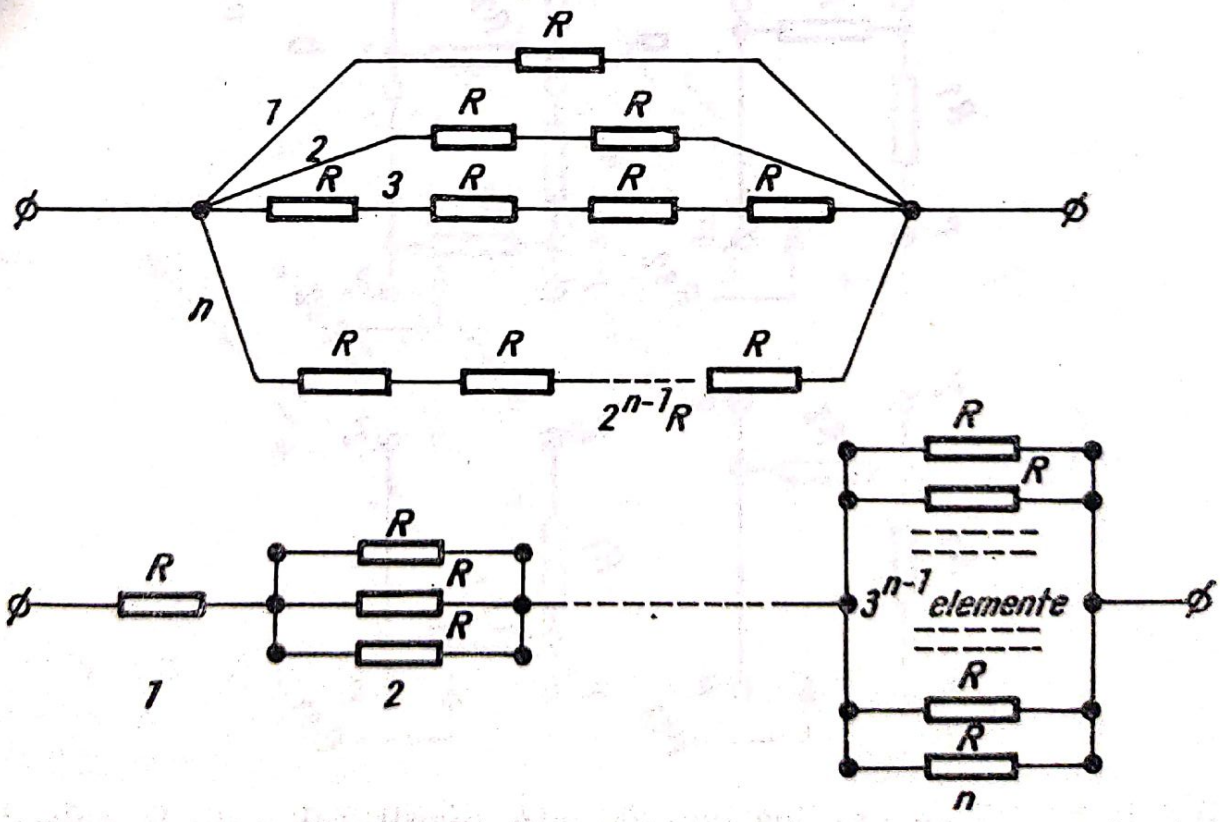


Fig. 3.4.18.

Scanned with OKEN Scanner

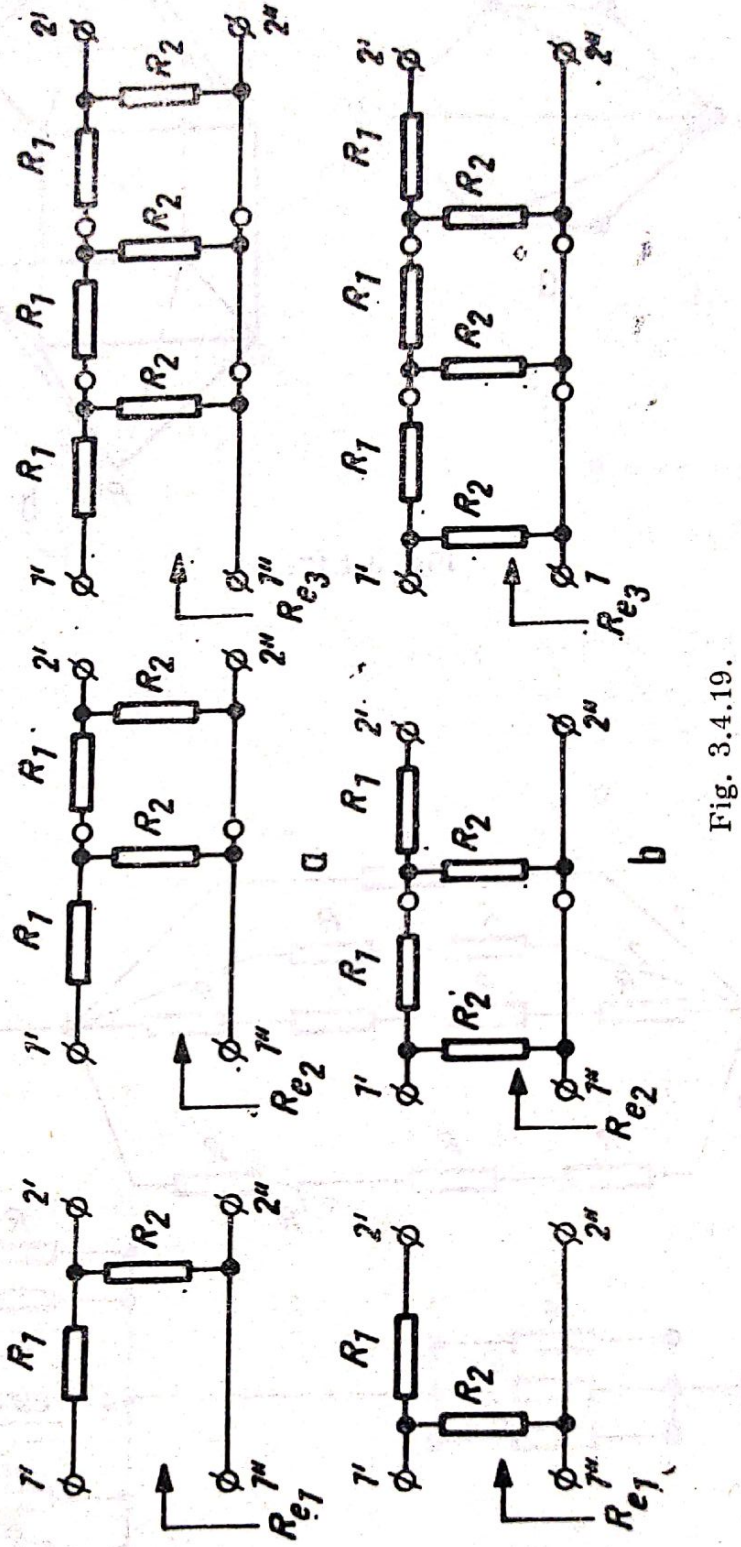


Fig. 3.4.19.

3.4.22.** Să se explice coincidența rezultatelor de la cele două probleme precedente.

Scanned with OKEN Scanner

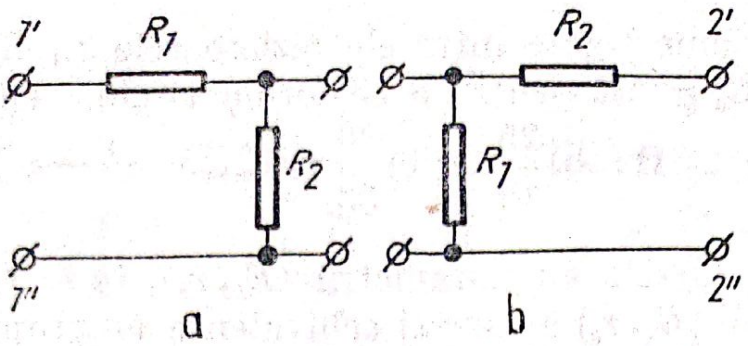
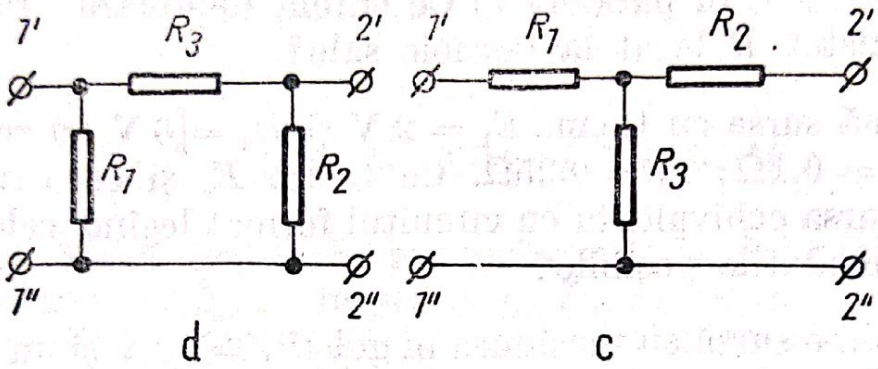


Fig. 3.4.21.



3.4.23.*** Să se calculeze rezistența echivalentă a circuitului cînd numărul elementelor sale componente tinde spre infinit. Cum se explică valoarea obținută din expresia lui R_e pentru $R = R'$?

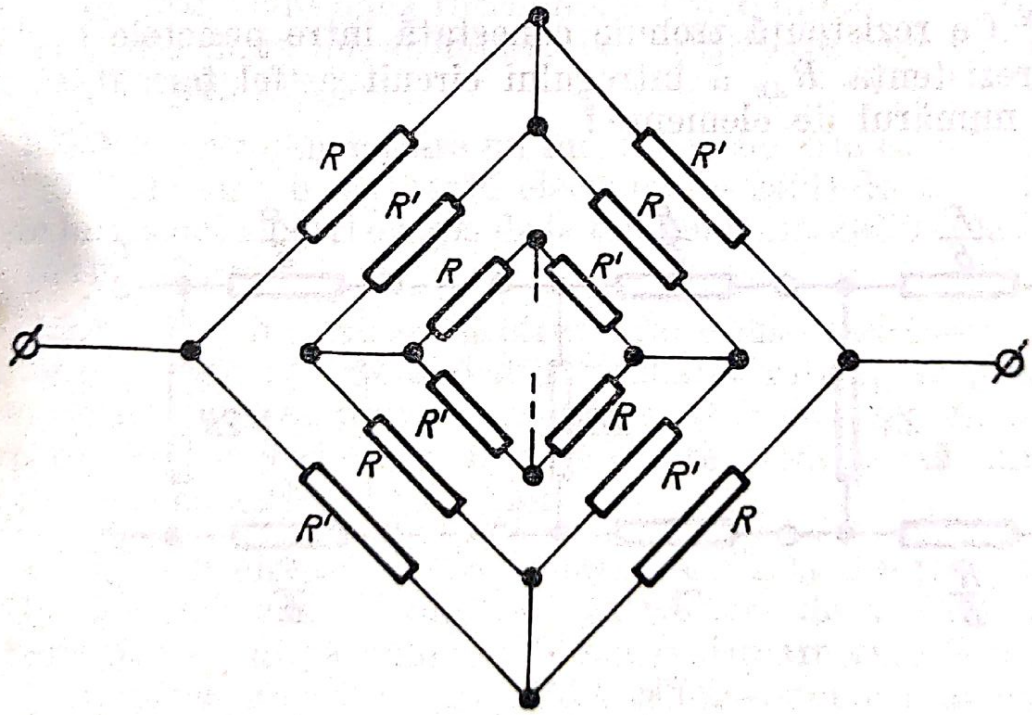


Fig. 3.4.23.

3.4.24.* Se dau două rezistoare $R_1 = 10\ \Omega$, trei de $R'_2 = 9\ \Omega$ fiecare, și un rezistor de $R_3 = 8\Omega$. Cum trebuie legate între ele cele șase rezistoare pentru a se obține un circuit cu rezistența echivalentă de: a) 4Ω; b) 16Ω; c) $\frac{35}{2}\ \Omega$; d) $\frac{351}{19}\ \Omega$?

3.4.25. Cum trebuie legate între ele rezistoarele $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 4\Omega$ pentru a se forma circuite cu rezistenţe echivalente de: a) $2{,}4\Omega$; b) $\frac{25}{12}\Omega$; c) $\frac{26}{33}\Omega$?

3.4.26. Se dau sursele cu parametrii (E_k, r_k), $k = 1, 2, \ldots, m$. Care sînt parametrii (E_e, r_e) ai sursei echivalente cu grupul de surse legate: a) în serie; b) în paralel? c) Ce curent debitează grupul de surse pe un rezistor R legat la bornele sale?

3.4.27.* Două surse cu t.e.m. $E_1 = 2$ V şi $E_2 = 6$ V au rezistenţele interne $r_1 = 0{,}1\Omega$; $r_2 = 0{,}25\Omega$. Ce t.e.m. E_e şi ce rezistenţă internă r_e are sursa echivalentă cu circuitul format legînd cele două surse în toate modurile posibile?

3.4.28.* Se dă o sursă cu tensiunea în gol $U_0 = 12$ V şi un curent de scurtcircuit $I_{sc} = 24$ A. Care sînt parametrii E_e şi r_e ai circuitelor formate legînd sursa dată cu un rezistor $R = 1\Omega$: a) în serie, b) în paralel?

3.4.29.** Ce rezistenţă trebuie conectată între punctele C şi D pentru ca rezistenţa R_{AB} a întregului circuit astfel format să nu depindă de numărul de elemente?

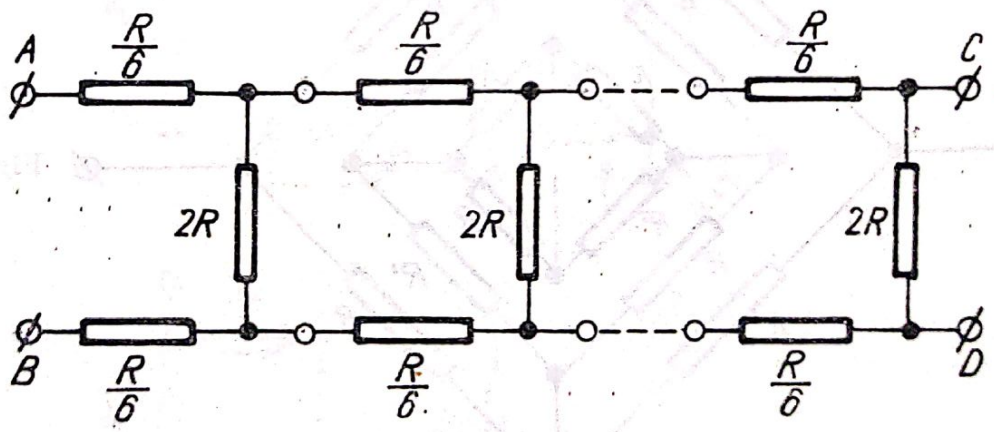


Fig. 3.4.29.

3.4.30.** Să se arate că potenţialele bornelor divizorului de tensiune din figură au expresia $V_k = h^{-k} V$ dacă $R_1 = (h-1) R$ şi $R_2 = \frac{h}{h-1} R$, cu h un număr arbitrar supraunitar.

Scanned with OKEN Scanner

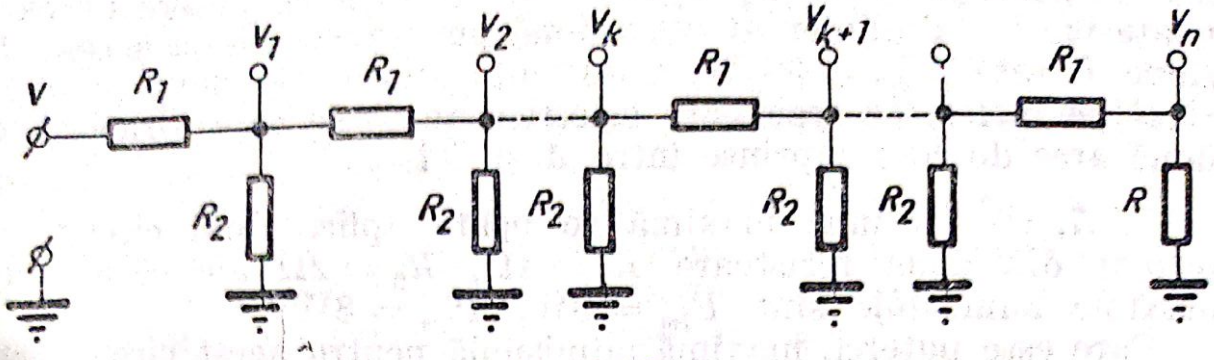


Fig. 3.4.30.

3.5. PUTERI ŞI ENERGII

3.5.1. Două rezistoare au rezistivităţile, lungimile şi secţiunile transversale, ρ_1, L_1, A_1 respectiv ρ_2, L_2, A_2. Se cere raportul puterilor P_1, respectiv P_2 consumate de aceste rezistoare cînd ele sînt legate : a) în serie, b) în paralel.

3.5.2. Două rezistoare legate în serie la o reţea de 220 V consumă puterile $P_1 = 582$ W respectiv $P_2 = 388$ V. Se cer puterile consumate de aceste rezistoare dacă rezistenţele lor se modifică : prima crescînd cu 20 % şi a doua micşorîndu-se cu 20 %. Care este variaţia procentuală a puterii totale ?

3.5.3. Ce randament are un încălzitor electric care fiind alimentat la 220 V şi avînd o rezistenţă electrică (la cald) de $R = 35{,}8\ \Omega$ încălzeşte într-o oră 12 litri de apă de la temperatura de 20°C la temperatura de fierbere ?

3.5.4.* Un încălzitor electric are două rezistoare. Timpul de fierbere a cantităţii de apă din încălzitor este t_1, respectiv t_2, după cum se conectează numai primul rezistor sau numai al doilea. Se cere timpul de fierbere al apei dacă se conectează ambele rezistoare : a) în serie ; b) în paralel.

3.5.5.* Un circuit electric alimentat de la o reţea (cu o tensiune dată) consumă energie electrică în valoare de V (lei) într-un timp t_s, respectiv t_p, după cum cele două rezistoare care îl formează sînt legate în serie respectiv în paralel. Cunoscînd costul c (lei/kWh) al energiei electrice, se cer energiile electrice consumate separat de fiecare rezistor în timp de o zi dacă rezistoarele s-ar alimenta fiecare direct de la reţea.

3.5.6.** Între punctele A şi B ale unui inel format dintr-un fir conductor se aplică o tensiune electrică $U = 6$V. Puterea luată de

inel în acest caz este $P_1 = 48$ W. Cea mai mică putere pe care o poate lua inelul alimentat între două puncte ale sale la aceeaşi tensiune U este $P_{min} = 36$ W. Cum sînt situate cele două puncte A şi B pe inel şi ce rezistenţe electrice au firele care formează cele două arce de cerc cuprinse între A şi B?

3.5.7. Ce tensiune maximă se poate aplica unui circuit serie format din două rezistoare $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$ ale căror puteri maxime admisibile sînt $P_{1m} = 9$W, $P_{2m} = 8$W?
Care este puterea maximă admisibilă pentru acest circuit serie?

3.5.8. O linie electrică de transport de energie primeşte o putere $P = 2$ MW la o tensiune $U = 100$ kV. Căderea de tensiune în lungul liniei este de 5%. Considerînd costul energiei electrice de 20 $\frac{\text{bani}}{\text{kWh}}$ se cere să se calculeze costul energiei pierdute în linie prin efect Joule în timp de un an. Care este randamentul liniei?

3.5.9.* O sursă cu o rezistenţă internă $r = 0{,}6\ \Omega$ alimentează un rezistor R cu o putere $P = 5{,}05$ W la un randament $\eta = 95\%$. Se cer: a) t.e.m. a sursei; b) tensiunea U la bornele sursei; c) rezistenţa R a rezistorului.

3.5.10.* Să se determine graficul puterii (algebrice) P date de o sursă circuitului conectat la bornele ei, în funcţie de tensiunea la bornele sursei. Care este tensiunea la bornele sursei pentru care această putere dată de sursă este maximă şi care este în acest caz randamentul sursei? Ce semnificaţie fizică are puterea dată P cînd are valoare negativă? Se consideră date mărimile E şi r ale sursei.

3.5.11. (R)* Care este puterea maximă pe care o poate da o sursă unui rezistor legat la bornele ei, dacă sursa are t.e.m. E şi rezistenţa internă r? Care este rezistenţa rezistorului ce ia această putere maximă?

3.5.12. (R)** O sursă cu t.e.m. E şi rezistenţa internă r dă unui rezistor conectat la bornele ei o putere P. Care este rezistenţa acestui rezistor? Pentru ce valori ale lui P problema are soluţie? Ce relaţie există între cele două valori găsite pentru R?

3.5.13*. O sursă dă în exterior aceeaşi putere $P = 4$ W, fie că la bornele ei se leagă o rezistenţă $R_1 = 0{,}01\Omega$, fie că la bornele ei se leagă o altă rezistenţă $R_2 = 100\ \Omega$, Se cer: a) curentul de scurt-circuit al sursei; b) puterea utilă maximă ce o poate da sursa; c) randamentul sursei şi tensiunea la bornele sursei cînd la bornele ei se leagă o rezistenţă $R = 2\ \Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

3.5.14.** Două acumulatoare identice legate în serie la bornele unui rezistor $R = 1{,}6\Omega$, îi dau acestuia o putere $P_1 = 465$ W. Legate în paralel la bornele aceluiași receptor îi dau o putere $P_2 = 160$ W. Care sînt puterile utile maxime ce le pot da cele două baterii de acumulatoare astfel formate?

3.5.15.** Două surse identice au curentul de scurtcircuit I_{sc} și puterea utilă maximă P_m. Să se calculeze puterea utilă maximă, curentul de scurtcircuit și tensiunea în gol pentru sursa formată prin legarea celor două surse în: a) serie, b) paralel.

3.5.16. (R)** Două acumulatoare au curenții de scurtcircuit I_{sc1} respectiv I_{sc2} și puterile utile maxime P_{m1} respectiv P_{m2}. Se cer curenții de scurtcircuit și puterile utile maxime ale bateriilor de acumulatoare formate prin legarea lor în serie respectiv în paralel. Cum se exprimă aceste mărimi dacă sursele au: a) aceeași curenți de scurtcircuit; b) aceleași puteri utile maxime?

3.5.17.* Un acumulator are randamentul $\eta_1 = 75\,\%$, iar altul alimentînd același rezistor un randament $\eta_2 = 66{,}7\,\%$. Care va fi randamentul unei baterii de acumulatoare formate prin legarea celor două acumulatoare: a) în serie; b) în paralel, dacă ea alimentează același rezistor?

3.5.18.* Ce rezistență R are rezistorul care primește o aceeași putere de la o baterie formată din n acumulatoare (E, r) identice, cînd acestea sînt legate în serie sau în paralel? Care este expresia acestei puteri?

3.5.19.** Se cere rezistența internă r a unei surse care, conectată la orice pereche de borne a circuitului reprezentat în figură, să-i dea o aceeași putere. Care este raportul dintre această putere și puterea utilă maximă a sursei?

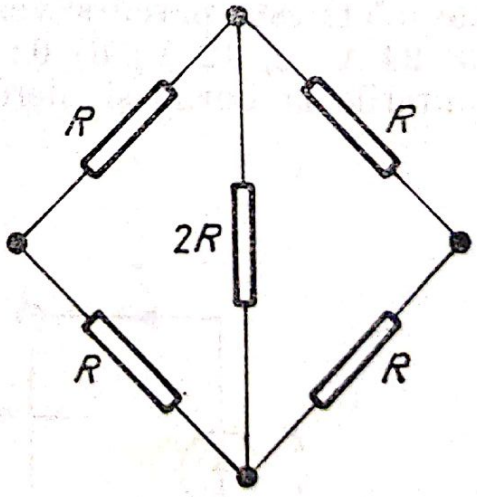


Fig. 3.5.19.

3.5.20. Se dau valorile relative ale tensiunii la borne în raport cu tensiunea la mers în gol $\alpha_1 = \frac{U_1}{U_g}$, $\alpha_2 = \frac{U_2}{U_g}$ pentru două regimuri de funcționare diferite ale unei surse date. Se cer: rapoartele intensităților curenților (I_1/I_2), puterilor (P_1/P_2) și randamentelor (η_1/η_2) din aceste regimuri.

3.5.21. Se dau valorile relative ale intensității curentului în raport cu curentul de scurtcircuit $\beta_1 = \frac{I_1}{I_{sc}}$, $\beta_2 = \frac{I_2}{I_{sc}}$, pentru două

Scanned with OKEN Scanner

regimuri de funcționare diferite ale unei surse date. Se cer : raportul tensiunilor la borne, raportul puterilor date la borne și raportul randamentelor în cele două regimuri.

3.5.22. (R) Se dă circuitul reprezentat în figură și se cer : puterea dată în exterior de primul acumulator, puterea primită din exterior de al doilea acumulator, puterea primită de rezistor. Se cunosc $E_1 = 12$ V, $r_1 = 0{,}5\ \Omega$, $E_2 = 6$ V, $r_2 = \frac{2}{3}\ \Omega$, $R = \frac{8}{5}\ \Omega$.

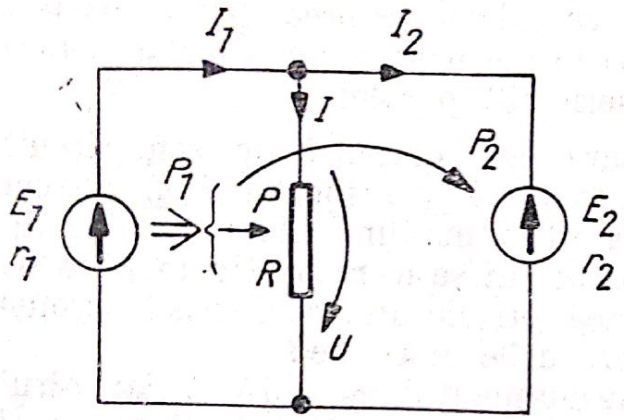


Fig. 3.5.22.

3.5.23.** Se consideră același circuit ca și în problema precedentă. Se cer valorile rezistenței R pentru care puterea (algebrică) dată de a doua sursă este : a) pozitivă ; b) nulă ; c) negativă. Care este cea mai mare putere la borne pe care o poate da respectiv lua acest acumulator în circuitul considerat ? În ce regimuri se realizează aceste puteri maxime ?

3.5.24. Un acumulator cu t.e.m. de 12 V și o rezistență internă de 0,5 Ω este parcurs (vezi figura) de un curent I egal cu : a) 48 A ; b) 24 A ; c) 12 A ; d) 0 ; e) — 12 A. Se cer : tensiunile la borne U, puterile la borne și pierderile de putere în interiorul sursei.

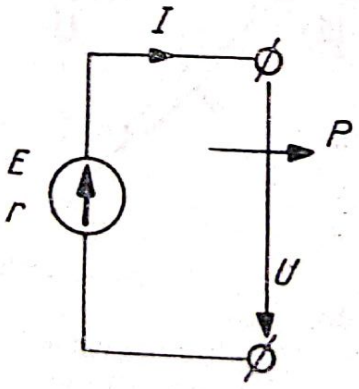


Fig. 3.5.24.

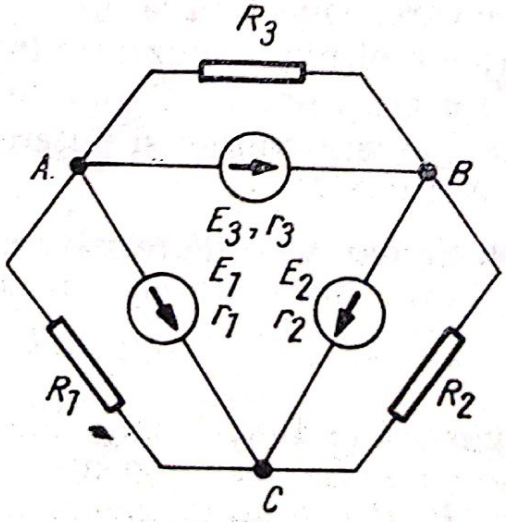


Fig. 3.5.25

3.5.25. Se cer puterile la borne pentru sursele din circuit. Se dau $E_1 = E_2 = 6$ V, $r_1 = r_2 = 0{,}5\ \Omega$, $E_3 = 12$ V, $r = 1\Omega$, $R_1 = R_2 =$

Scanned with OKEN Scanner

$= 2\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$. Ce valoare are puterea dată de acest circuit unui rezistor $R = 6\,\Omega$ care s-ar conecta între punctele A și B? Ce rezistență R_m ar trebui să aibă acest rezistor pentru ca el să primească o putere maximă?

3.6. PROBLEME DIVERSE

3.6.1.** Se dau patru becuri de putere nominală $P_{1n} = 100\,\text{W}$ și un bec cu puterea nominală $P_{2n} = 200\,\text{W}$, toate cu o tensiune nominală de $U_n = 110\,\text{V}$. Se cer: a) două moduri de conectare posibilă a celor cinci becuri la o rețea de 220 V, astfel încît fiecare bec să funcționeze în regim normal. Valorile nominale corespund regimului normal de funcționare pentru care sînt construite becurile; b) rezistența echivalentă a celor două circuite formate la punctul (a), c) să se indice care din cele două moduri de conectare este mai indicat ca soluție tehnică.

3.6.2. În regim nominal de funcționare zece rezistoare sînt caracterizate prin următoarele mărimi:

$$R_1 = R_5 = 10\,\Omega,\ U_1 = U_5 = 6\,\text{V};\quad U_3 = 8\text{V},\ I_3 = 1\,\text{A};$$

$$P_2 = P_6 = 4\,\text{W},\ U_2 = U_6 = 4\,\text{V};\quad P_4 = 4\,\text{W};\quad R_4 = 4\,\Omega;$$

$$R_7 = 10\,\Omega,\ I_7 = 2\,\text{A};$$

$$I_8 = I_9 = I_{10} = \frac{2}{3}\,A,\ P_8 = P_9 = P_{10} = 4\,\text{W}.$$

Să se determine rezistența fiecărui rezistor.
Cum pot fi conectate ele la o rețea de 12 V astfel încît fiecare rezistor să funcționeze în regim nominal?

3.6.3. Se dau două surse identice cu t.e.m. $E = 10\,\text{V}$, și rezistențe interne $r = 0{,}5\Omega$. Cum trebuie ele conectate la bornele unui rezistor $R = 9\Omega$ ca să-i dea acestuia o putere maximă? Care este valoarea acestei puteri?

3.6.4. (R) Se dau $N = 64$ surse identice, fiecare cu o t.e.m. $E = 1{,}2\text{V}$ și o rezistență internă $r = 0{,}8\Omega$, cu care se formează un circuit serie-paralel, din n_s grupe înseriate, fiecare grupă fiind formată din n_p surse legate în paralel, astfel încît $n_s n_p = N$. Să se determine

Scanned with OKEN Scanner

valorile n_s şi n_p pentru care: a) bateria de surse formată să dea unui rezistor de rezistenţă dată, $R = 3{,}2\ \Omega$, conectat la bornele ei o putere maximă, b) bateria de surse formată poate da cea mai mare putere, unui rezistor a cărui rezistenţă se cere să fie şi ea determinată.

3.6.5. O instalaţie de iluminat formată din 24 de becuri fiecare cu puterea nominală $P_n = 30\text{W}$ e alimentată la tensiunea nominală a becurilor $U_n = 24$ V. Instalaţia trebuie alimentată de la o baterie de acumulatoare formată din acumulatoare fiecare cu t.e.m. $E = 2{,}2$ V, rezistenţa internă $r = 0{,}1\Omega$. Cîte acumulatoare sînt necesare şi cum trebuie legate acumulatoarele în cadrul bateriei pentru ca să se realizeze un curent de descărcare dat $I_d = 2$ A pentru fiecare acumulator?

3.6.6. Şase tuburi electronice au tensiunea nominală de 6 V. Cîte două tuburi sînt de acelaşi tip: (T_1) cu curent de alimentare de 0,1A (T_2) cu curent de alimentare de 0,2 A şi (T_3) de 0,3 A. Să se calculeze rezistenţele adiţionale necesare realizării unor montaje care să asigure funcţionarea nominală a tuburilor cînd alimentarea montajelor se face de la o reţea de 220 V: a) cu toate tuburile în paralel; b) cu tuburi şuntate şi apoi legate în serie; c) ce puteri iau circuitele formate la a) şi b).

3.6.7. Ce curent trece printr-o linie bifilară la scurtcircuitarea capetelor ei? Se ştie că această linie ar da o aceeaşi putere cunoscută P unor rezistoare de rezistenţe cunoscute R_1 respectiv R_2, conectate pe rînd cîte unul la capătul liniei? Care este tensiunea U la începutul liniei şi care sînt tensiunile U_1, U_2 la bornele celor două rezistoare?

3.6.8.** La începutul unei linii formată din două fire conductoare se aplică o tensiune $U = 230$ V. Conectînd la capătul liniei nu mai un receptor cu putere nominală $P_{1n} = 10$ kW tensiunea la capătul liniei este $U_1 = 220$ V. Ce putere nominală are un al doilea receptor care conectat în paralel cu primul face ca tensiunea la capătul liniei să scadă la $U_2 = 210$ V? Se ştie că cele două receptoare au fiecare tensiunea nominală de 220 V. Se neglijează variaţia rezistenţelor cu temperatura.

3.6.9.* O linie bifilară de transport de energie electrică e formată din două conductoare de lungime L fiecare. Ea are o tensiune constantă la începutul ei şi un rezistor de rezistenţă R_0 la capătul ei opus. La distanţa x de începutul liniei se produce un defect de izolaţie între cele două fire ale ei, corespunzător intercalării în acest loc a unei rezistenţe necunoscute R între cele două fire. Ca urmare, curentul din sursă se măreşte de α ori, iar puterea receptorului se

Scanned with OKEN Scanner

reduce la β^2 din valoarea ei inițială ($\beta > 0$). Știind că fiecare din cele două fire conductoare ale liniei are o rezistență R' pe unitatea de lungime a liniei, se cere distanța x. Care este valoarea rezistenței R a izolației la locul defectului?

3.6.10. Ce secțiune trebuie să aibă conductorul de cupru din care se realizează o linie bifilară (cu două fire) de lungime $L = 10$ km pentru a alimenta un receptor de la o rețea cu tensiunea $U = 11$ kV? Se știe că dacă receptorul s-ar conecta direct la rețea el ar lua o putere $P = 100$ kW, iar căderea de tensiune pe linie este $\Delta u\,\% = 1\,\%$. (Δu este raportul dintre căderea de tensiune din lungul firelor liniei și tensiunea de alimentare). Ce putere ar absorbi de la această linie un sistem de $n = 10$ astfel de receptoare conectate în paralel la extremitatea ei.

3.6.11. La circuitele reprezentate în figură se dau tensiunea $U = 100$ V și rezistențele $R_1 = R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 6\,\Omega$, $R_4 = 3\,\Omega$. Se cer: a) intensitatea curentului I și tensiunea U_{AB}, (figura a); b) curentul de scurtcircuit I_{sc} și curentul I'. (figura b); c) bilanțul puterilor $P = UI' = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2 + R_4I_4^2$ în cazul b).

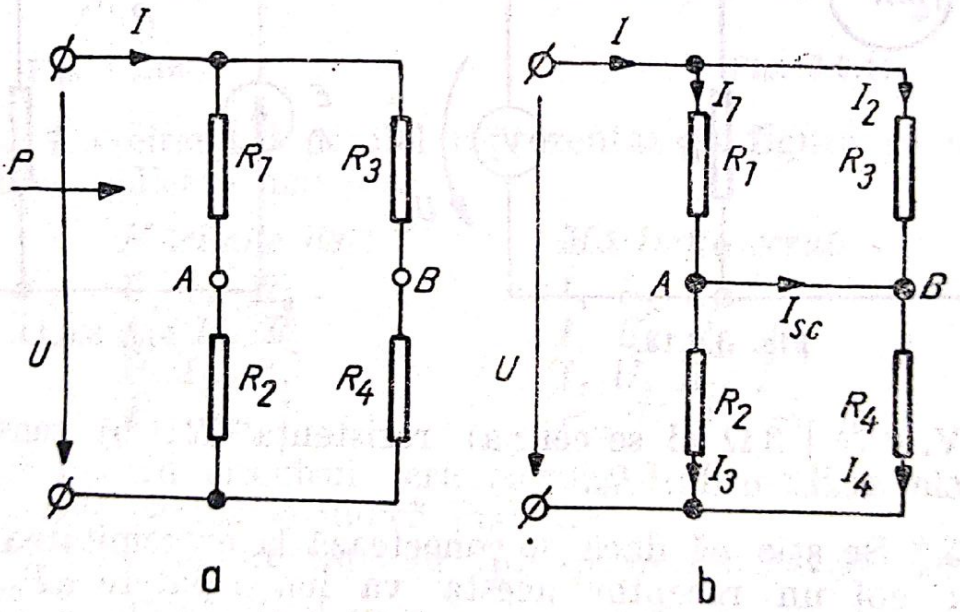


Fig. 3.6 11.

3.6.12. Valorile mărimilor ce caracterizează circuitul sînt cele indicate în figură. Se cer: a) intensitatea curentului I; b) tensiunile U_{AB}, U_{BC}, U_{CD}, U_{CA}, U_{BD}; c) bilanțul puterilor în formule $\Sigma P_E = \Sigma P_J$ și $\Sigma P_{dat} = 0$; d) rezistorul care legat între punctele B și D ar lua o putere maximă și valoarea acestei puteri maxime; e) intensitatea curentului din conductorul de rezistență nulă ce ar scurtcircuita punctele B și D.

Scanned with OKEN Scanner

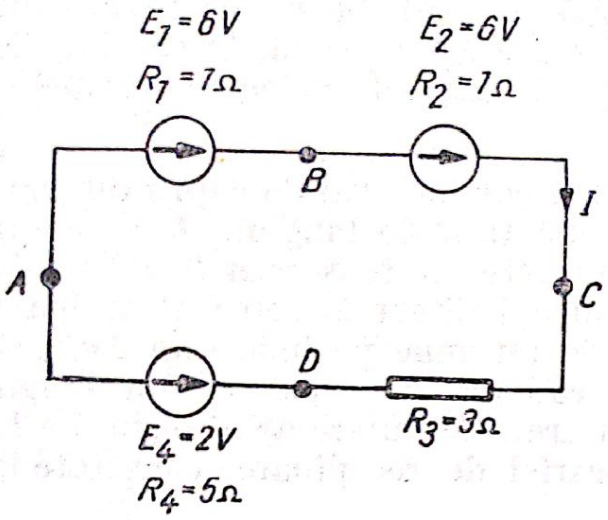


Fig. 3.6.12.

3.6.13. Se cer : intensitatea curentului I din rezistorul R, rezistența R a acestuia, tensiunea U și puterea disipată în fiecare element (vezi figura). Se cunosc indicația miliampermetrului $I_A = 110$ mA, indicația voltmetrului $U_V = 30$ V și rezistențele lor interne $r_A = 3\ \Omega$, respectiv $R_V = 3$ kΩ.

3.6.14.** Se știe că randamentul sursei din circuit este $\eta = 0{,}5$ și că dacă rezistorul R_0 s-ar conecta numai el la bornele sursei ar lua de la aceasta puterea ei utilă maximă. Se dau

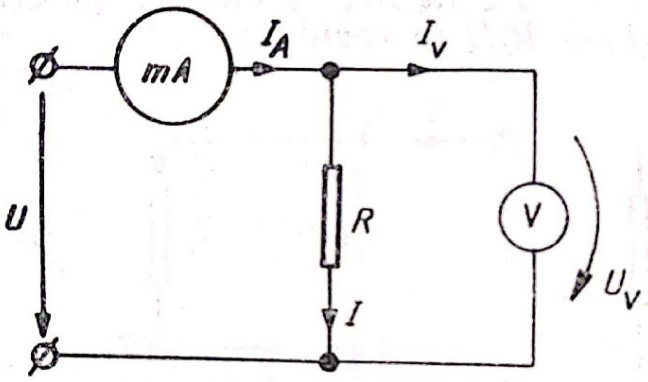


Fig. 3.6.13.

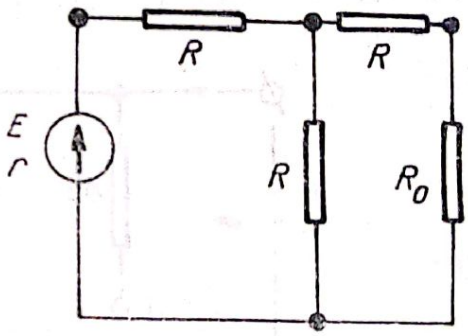


Fig. 3.6.14.

$E = 10$ V, $r = \sqrt{3}\ \Omega$ și se cer : a) rezistența R ; b) tensiunea U_0 la bornele rezistorului R_0.

3.6.15.* Se știe că dacă se conectează la extremitatea unei linii aflate în gol un receptor acesta va lua o putere αP_0, unde P_0 este puterea nominală a receptorului corespunzătoare tensiunii în gol U a liniei. Ce semnificație are coeficientul α? Ce putere vor lua n astfel de receptoare legate în paralel la extremitatea liniei și care va fi tensiunea U_n la bornele lor? (Se neglijează variația rezistenței receptoarelor cu temperatura).

3.6.16.* Se consideră circuitul reprezentat în figură. Se dau mărimile indicate în prima coloană. Se vor indica relațiile prin care se pot calcula (din aproape în aproape) mărimile cerute în a doua coloană.

Scanned with OKEN Scanner

Cazul	*Mărimile date*	*Mărimile cerute*
a)	U, U_1, R_2	U_2, I, R_1, R_e, P_1, P
b)	P, I, R_1	U, U_1, U_2, R_2
c)	P, U_1, R_2	I, U, P_1
d)	P_2, U, R_1	I, P_1, R_2

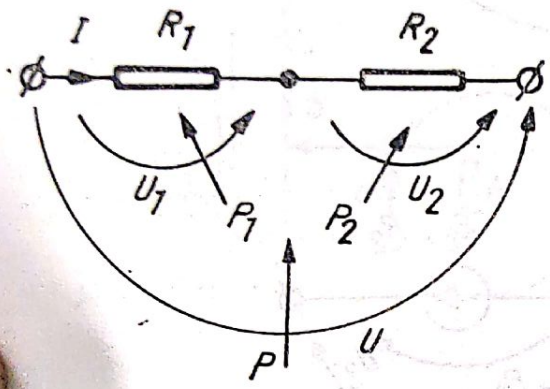


Fig. 3.6.16.

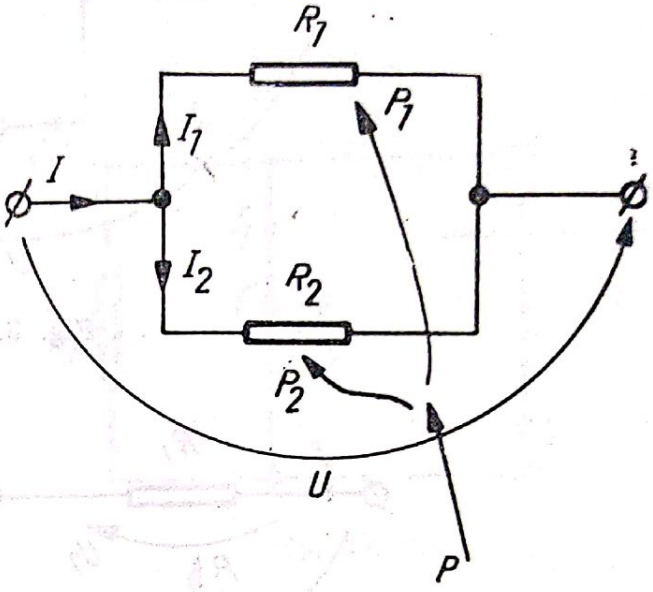


Fig. 3.6.17.

3.6.17.* La circuitul paralel reprezentat în figură se dau şi se cer mărimile indicate mai jos.

Cazul	*Mărimile date*	*Mărimile cerute*
a)	U, I_1, R_2	I, P, R_1
b)	P_1, I_2, R_e	I, U, R_1, R_2
c)	P, I_1, R_2	I, U, R_1, R_2
d)	P_1, R_2, I	P_2, U, I_1, P, R_1.

3.6.18.* Pentru circuitul serie-paralel din figură, mărimile cunoscute şi cele cerute se indică mai jos.
Să se determine din aproape în aproape mărimile cerute.

Cazul	*Mărimile date*	*Mărimile cerute*
a)	R_3, P_2, I_2, R_1	U, I_1, I_3, U_2, U_3, R_e
b)	P_1, R_2, I_3, U	U_{23}, I_2, I_1, U_1, P.

3.6.19. La circuitul din figură se dau şi se cer mărimile indicate mai jos.

Cazul	*Mărimile date*	*Mărimile cerute*
a)	R_2, R_2, U, I	R_1, U_1, U_2
b)	U, P_E, U_2, R_2	E_2, R_2, I
c)	E_2, P_2, U, R_2	I, R_e, U_1.

Scanned with OKEN Scanner

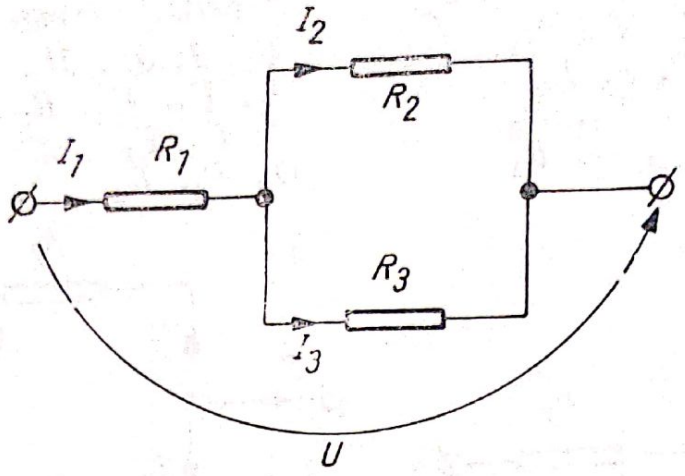


Fig. 3.6.18.

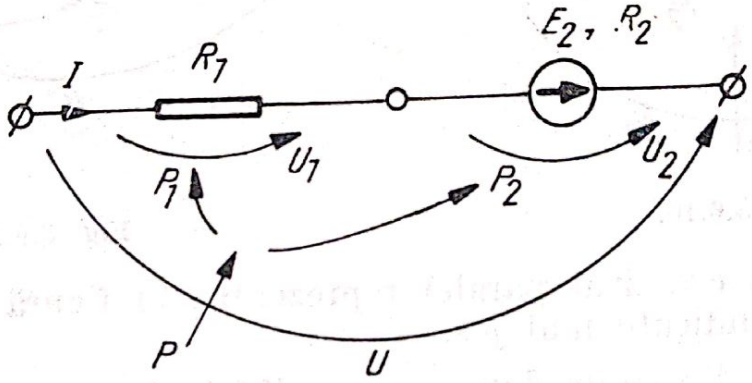


Fig. 3.6.19.

3.6.20. Ce putere utilă maximă poate da o sursă unui rezistor legat la bornele ei dacă sursa are o tensiune în gol $U_0 = 60$ V şi un curent de scurtcircuit $I_{sc} = 120$ V? Ce putere dă această sursă unei alte surse cu t.e.m. pe jumătate şi rezistenţă internă dublă, dacă aceasta se leagă numai ea la bornele primei surse.

3.6.21. Un circuit serie este format dintr-o sursă cu $E = 6$ V, $r = 1\Omega$ şi dintr-un rezistor cu o rezistenţă $R = 5\ \Omega$. Curentul măsurat de un ampermetru înseriat în circuit este I_A.

Notînd cu I intensitatea curentului din circuit înainte de introducerea ampermetrului, eroarea absolută a măsurării este $\Delta I = I_A - I$, valoarea relativă a acesteia este $\gamma = \dfrac{\Delta I}{I}$ iar valoarea relativă procentuală a erorii este $\gamma_{\%} = \gamma \cdot 10^2$. Se cer valorile numerice ale lui ΔI, γ şi $\gamma_{\%}$ cunoscînd rezistenţa ampermetrului $R_A = 1\ \Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

3.6.22. Un rezistor $R = 500\ \Omega$ este alimentat de un potențiometru cu rezistența totală $R_0 = 1000\ \Omega$. Tensiunea la bornele potențiometrului este $U = 10$ V. Să se determine tensiunea u dintre borna a și cursorul situat pe rînd în punctele a, b, c, și d, în următoarele cazuri : 1) cursorul în gol ; 2) rezistorul R conectat ; 3) un voltmetru cu rezistența $R_v = 4000\ \Omega$ conectat în paralel cu rezistorul R. Se știe că $ad = 2ab = 4bc$.

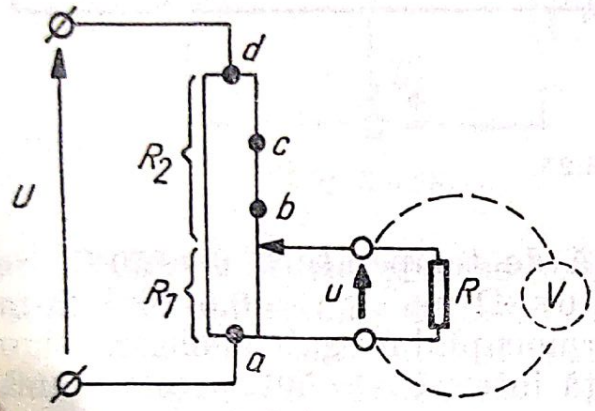


Fig. 3.6.22.

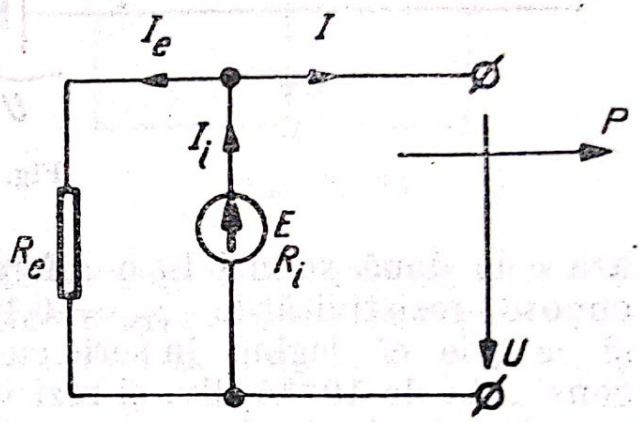


Fig. 3.6.23.

3.6.23. Un generator de curent continuu cu excitația în derivație are o t.e.m. $E = 130$ V și o rezistență a indusului $R_i = 0{,}5\ \Omega$. Se știe că atunci cînd generatorul alimentează receptorul conectat la bornele lui cu un curent $I = 10$ A, curentul excitației este 4% din acest curent I. Se cer : a) tensiunea la bornele generatorului ; b) puterea dată receptorului ; c) rezistența excitației R_e ; c) randamentul generatorului.

3.6.24. Un ceainic electric are un randament $\eta = 0{,}8$, o tensiune nominală $U_n = 220$ V și absoarbe în regimul nominal un curent $I_n = 5{,}5$A. Se cer : a) rezistența ceainicului, b) capacitatea ceainicului (în dm^3) dacă, umplut cu apă la temperatura de 20°C, el produce fierberea acesteia în timp de $t = 7$ min și 48 s ; c) costul energiei electrice necesare fierberii a 3 l de apă, dacă 1 kWh costă 30 de bani.

3.6.25. Un număr n de condensatoare plane cu capacități C_k sînt legate în serie cu o sursă avînd o t.e.m. E și o rezistență internă neglijabilă. Se știe că diferitele condensatoare au fiecare un dielectric omogen cu permitivitatea ε_k și rezistivitatea ρ_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Se cere tensiunile la bornele condensatoarelor și sarcinile lor.

3.6.26. Un termocuplu format dintr-un fir de constantan și unul de cupru fiecare cu un diametru $d = 0{,}2$ mm și o lungime $L = 1$ m

Scanned with OKEN Scanner

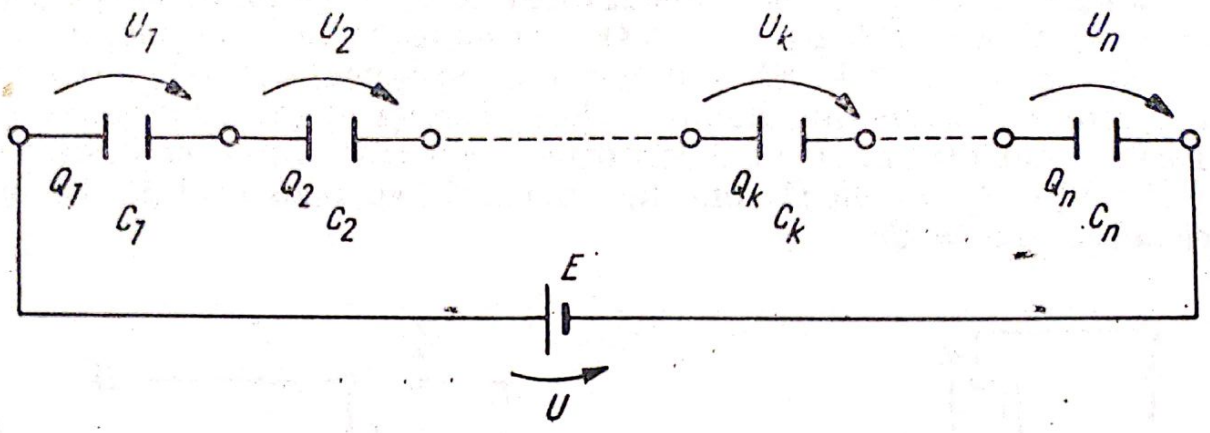


Fig. 3.6.25.

are cele două suduri la o diferență de temperatură $\theta = 50°C$. Se cunosc rezistivitățile $\rho_{Cu} = 0{,}17 \cdot 10^{-7}\ \Omega \cdot m$, $\rho_{const} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot m$ și se știe că legînd în serie cu termocuplul un galvanometru cu o constantă de 10^{-6}A/div. și rezistență internă $r = 50\Omega$ acesta indică $n = 30$ diviziuni. Se cere: a) t.e.m. a termocuplului și b) t.e.m. (specifică) a termocuplului produsă de o diferență de temperatură de un grad Celsius (volți/grad).

3.6.27. (R) Un conductor cilindric de rază a și lungime L are rezistivitatea ρ la temperatura θ_0. Coeficientul de transmisie a căldurii prin suprafață laterală a conductorului este k [W/m^2·grd]. Coeficientul de temperatură al rezistivității este α. La capetele rezistorului se aplică o tensiune constantă U. Știind că temperatura mediului ambiant este θ' se cer: intensitatea curentului și rezistența rezistorului după ce temperatura acestuia devine constantă.

3.6.28. Să se calculeze t.e.m. E și rezistența internă r a unei surse cunoscînd pentru cîte două regimuri de funcționare diferite ale sursei mărimile date mai jos:

a) (U_1, I_1), (U_2, I_2);

b) (U_1, R_1), (U_2, R_2);

c) (U_1, P_1), (U_2, P_2);

d) (R_1, I_1), (R_2, I_2)

e) (R_1, P_1), (R_2, P_2)

f) (I_1, P_1), (I_2, P_2)

3.6.29. Să se determine randamentul și intensitatea curentului de scurtcircuit pentru sursa din problema precedentă în regimul *1* de la cazurile a), c) și f).

Scanned with OKEN Scanner

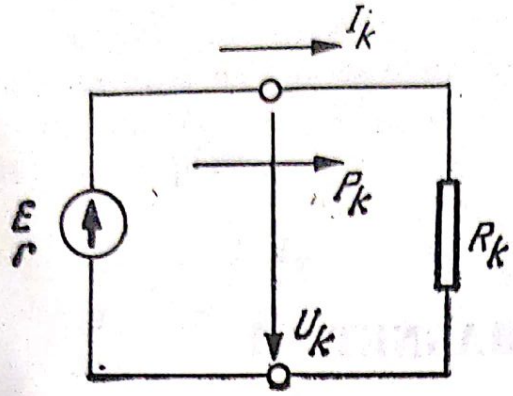


Fig. 3.6.28.

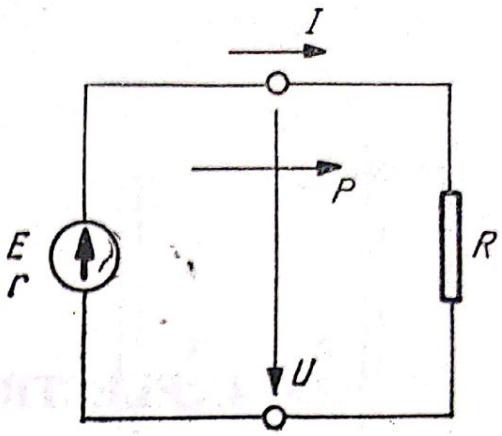


Fig. 3.6.30

3.6.30.** Un receptor se leagă la bornele unei surse cu t.e.m. E şi rezistenţa internă r date. Se cer tensiunea la borne U, intensitatea curentului I şi rezistenţa R a receptorului în funcţie de puterea P dată receptorului. Discuţie.

3.6.31. O sursă (vezi fig. 3.6.30) cu t.e.m. E şi rezistenţa internă r dă unui rezistor R_1, conectat la bornele ei, o putere P_0, la un curent I_1 şi o tensiune U_1. Aceeaşi sursă dă unui alt rezistor R_2 conectat la bornele ei (în locul rezistorului R_1) o aceeaşi putere P_0, la un curent I_2 şi o tensiune U_2. Se cer: a) relaţia dintre R_1 şi R_2; b) relaţia dintre I_1, I_2 şi curentul de scurtcircuit $I_{sc} = \frac{E}{r}$ al sursei; c) relaţia dintre I_1, I_2 şi P_0, r; d) relaţia dintre U_1, U_2 şi tensiunea în gol U_g; relaţia dintre U_1, U_2 şi P_0, r; f) relaţia dintre U_1 şi I_2.

3.6.32. La bornele unei surse cu t.e.m. E şi rezistenţa internă r se leagă un rezistor de rezistenţă R (vezi fig. 3.6.30). Să se determine expresiile analitice şi graficele dependenţelor de mai jos:

a) $I = I(R)$, $U = U(R)$, $P = P(R)$, $\eta = \eta(R)$;

b) $U = U(I)$, $P = P(I)$, $\eta = \eta(I)$;

c) $P = P(U)$, $\eta = \eta(U)$;

d) $\eta = \eta(P)$.

Scanned with OKEN Scanner

4. ELECTROMAGNETISM

BREVIAR

Forțe exercitate în cîmp magnetic. Inducția magnetică

Forța ce acționează în cîmp magnetic asupra unui corp punctual încărcat cu sarcina electrică q (fig. 1) este (relația lui Lorentz)

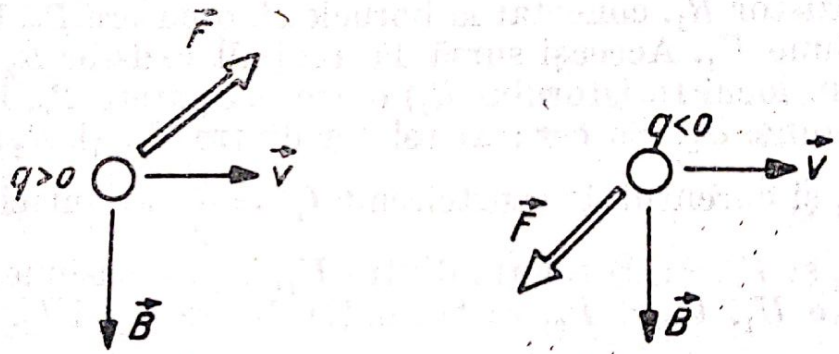


Fig. 1.

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B}), \tag{1}$$

unde: $\vec{v}$ este viteza corpului, iar $\vec{B}$ — inducția magnetică.

Forța exercitată în cîmp magnetic uniform asupra unui conductor filiform rectiliniu parcurs de un curent electric de intensitate I (fig. 2) este (relația lui Laplace)

$$\vec{F} = I\,(\vec{l} \times \vec{B}), \tag{2}$$

în care: $\vec{l}$ este lungimea orientată a conductorului, avînd direcția acestuia și sensul curentului, $\vec{B}$ — inducția magnetică.

Scanned with OKEN Scanner

Forța de atracție exercitată pe unitatea de lungime între două conductoare rectilinii paralele, de lungime foarte mare, plasate într-un mediu omogen și izotrop, cînd sînt parcurse de curenți avînd același sens și intensitățile I_1 și I_2 (fig. 3) este (relația lui Ampère)

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r}, \qquad (3)$$

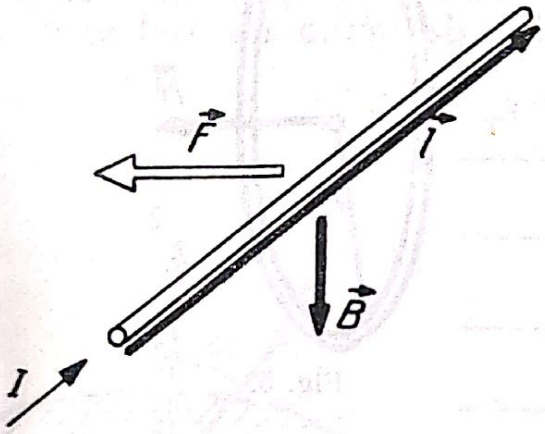


Fig. 2.

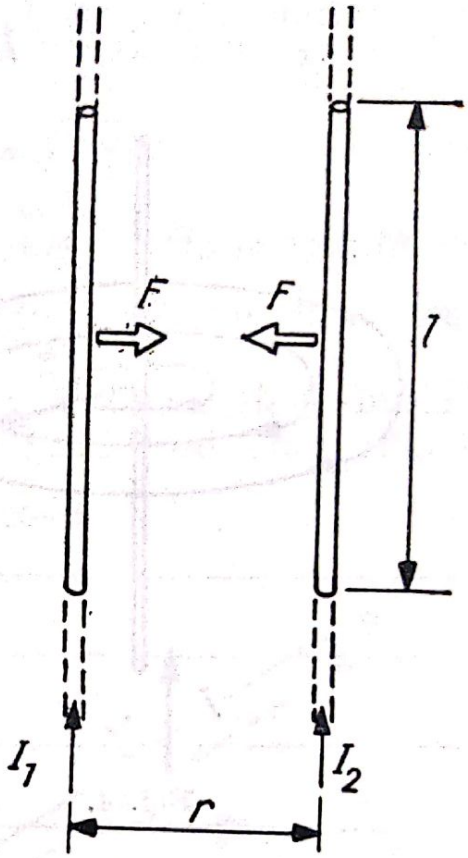


Fig. 3.

unde: r este distanța între conductoare, μ — permeabilitatea magnetică a mediului.

$$\mu = \mu_0 \mu_r, \qquad (4)$$

în care: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12{,}57 \cdot 10^{-7}$ H/m este permeabilitatea magnetică a vidului, μ_r — permeabilitatea relativă a mediului.

Cîmpul magnetic al conductoarelor parcurse de curent electric
Intensitatea cîmpului magnetic

Intensitatea cîmpului magnetic al unui conductor rectiliniu foarte lung (fig. 4), parcurs de un curent de intensitate I, într-un punct situat la distanța r de acesta este

$$H = \frac{I}{2\pi r} \qquad (5)$$

Intensitatea cîmpului magnetic în centrul unei spire circulare de rază r (fig. 5) este

$$H = \frac{I}{2r}, \tag{6}$$

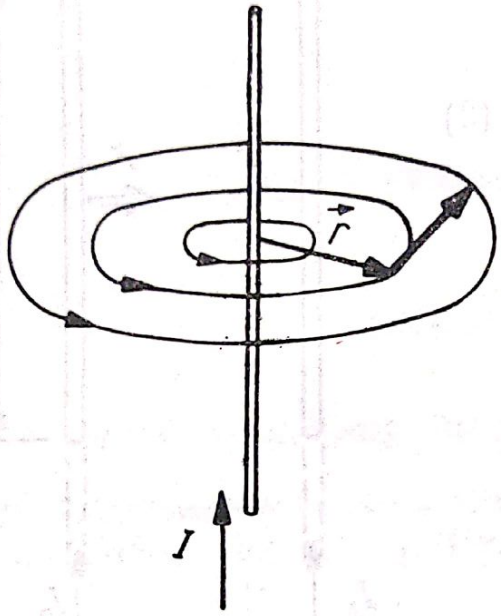


Fig. 4.

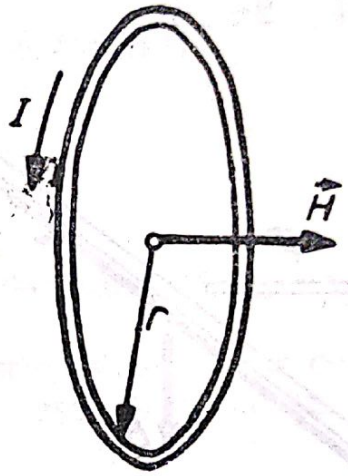


Fig. 5.

unde I este intensitatea curentului.

Intensitatea cîmpului magnetic pe axul unui solenoid avînd lungimea l mult mai mare decît diametrul spirelor (fig. 6), este

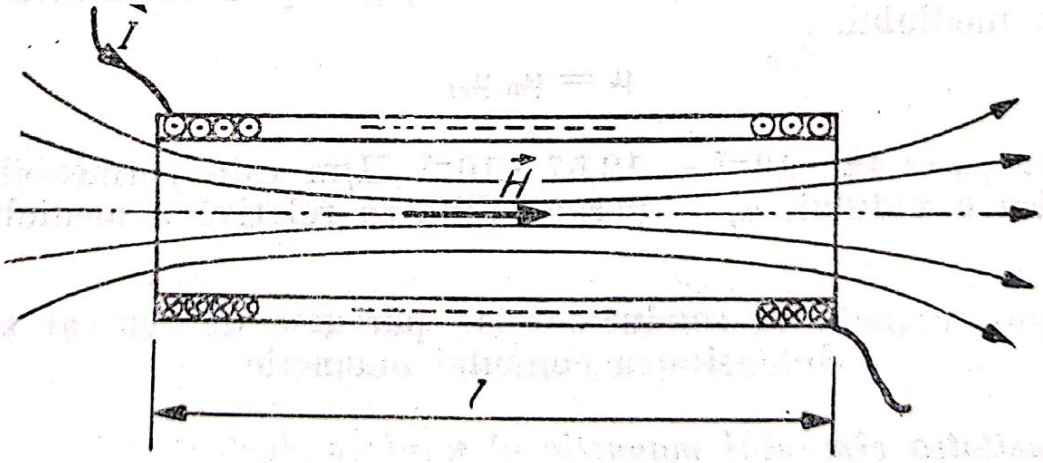


Fig. 6.

$$H = \frac{NI}{l}, \tag{7}$$

unde N este numărul spirelor solenoidului.

Fluxul magnetic. Tensiunea magnetică

Fluxul magnetic produs de un cîmp magnetic uniform printr-o suprafață plană limitată de o curbă (c) este (fig. 7)

$$\varphi = BS\cos\alpha = \vec{B}\cdot\vec{S}, \tag{8}$$

unde $\vec{B}$ este inducția magnetică, $\vec{S} = \vec{n}S$ — aria orientată a suprafeței, $\vec{n}$ — normala pozitivă asociată după regula burghiului cu sensul pozitiv ales de-a lungul curbei (c).

Tensiunea magnetică într-un cîmp uniform de-a lungul unei drepte ce face un unghi α cu direcția liniilor de cîmp (fig. 8) este

$$U_{m_{AB}} = Hd\cos\alpha. \tag{9}$$

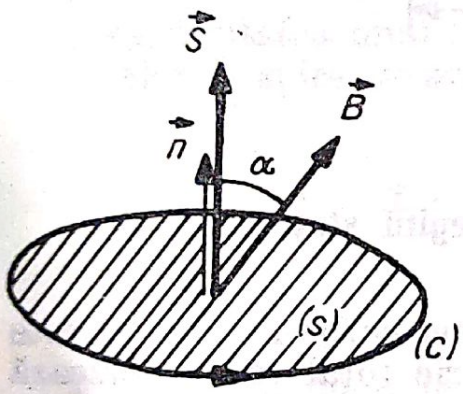


Fig. 7.

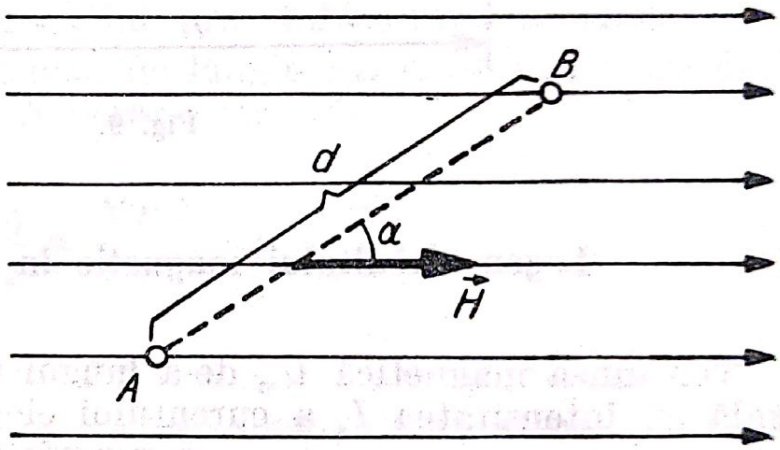


Fig. 8.

Legătura între intensitatea cîmpului magnetic și inducția magnetică

Reluctanța unei laturi de circuit magnetic. În medii liniare, intensitatea $\vec{H}$ a cîmpului magnetic și inducția $\vec{B}$ sînt legate prin relația

$$\vec{B} = \mu\vec{H}. \tag{10}$$

Corespunzător, între tensiunea magnetică $U_m = Hl$ de-a lungul unei laturi a unui circuit magnetic liniar și fluxul magnetic (fascicular) $\varphi = BS$ prin aceasta (fig. 9), rezultă *relația lui Ohm pentru circuitele magnetice*

$$U_m = R_m\varphi, \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$R_m = \frac{1}{\mu}\frac{l}{S} \tag{12}$$

este reluctanța laturii.

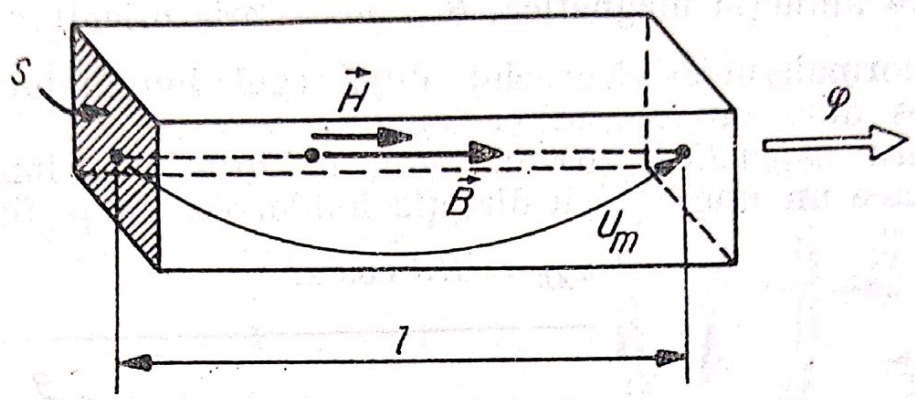


Fig. 9.

Legea circuitului magnetic în regim staționar

Tensiunea magnetică U_m de-a lungul unei curbe închise (c) este egală cu intensitatea I_s a curentului electric total ce traversează o suprafață (S), ce se sprijină pe curba (c) (fig. 10)

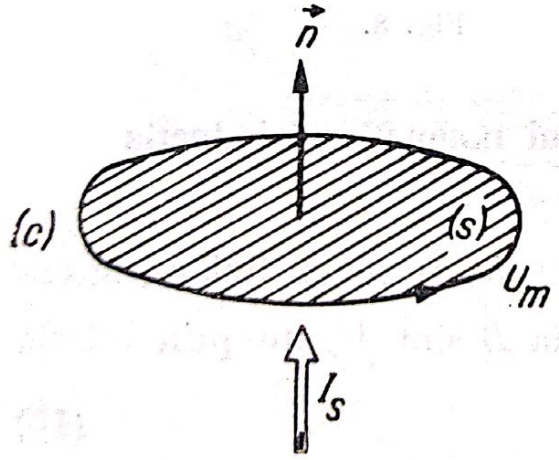


Fig. 10.

$$\overset{\cdot\cdot}{U_m} = I_s. \tag{13}$$

Sensul pozitiv al normalei la suprafață este asociat conform regulii burghiului cu sensul pozitiv ales pe curba (c).

Pentru o buclă a unui circuit magnetic, relația se scrie

$$\sum_{k=1}^{n} H_k l_k = \sum_{j=1}^{m} N_j I_j, \tag{14}$$

unde $\sum_{k=1}^{n} H_k l_k$ este tensiunea magnetică de-a lungul laturilor $(k = 1, 2, \ldots, n)$ din bucla considerată, N_j — numărul de spire al

Scanned with OKEN Scanner

bobinei j, I_j — intensitatea curentului din bobina j, iar $\sum_{j=1}^{m} N_j I_j$ — curentul total din înfășurările bobinelor ($j = 1, 2, \ldots, m$) din buclă.

Inductivități

Inductivitatea unei bobine este

$$L = \frac{\varphi}{I}, \tag{15}$$

unde φ — fluxul bobinei,

I — intensitatea curentului prin înfășurarea acesteia.

Inductivitatea unui solenoid de lungime l, mult mai mare decît raza celor N spire cu aria S fiecare, rezultă

$$L = \frac{\varphi}{I} = \frac{NBS}{I} = \mu \frac{N^2 S}{l}, \tag{16}$$

μ fiind permeabilitatea miezului magnetic, presupus liniar.

Fluxurile a două bobine cuplate magnetic se scriu

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12} = L_1 I_1 + L_{12} I_2,$$

$$\varphi_2 = \varphi_{21} + \varphi_{22} = L_{21} I_1 + L_2 I_2, \tag{17}$$

unde $L_1 = \frac{\varphi_{11}}{I_1} = \frac{\varphi_1}{I_1}\Big|_{I_2 = 0}$ și $L_2 = \frac{\varphi_{22}}{I_2} = \frac{\varphi_2}{I_2}\Big|_{I_1 = 0}$ (18)

sînt inductivitățile proprii ale celor două bobine, iar

$$L_{12} = \frac{\varphi_{12}}{I_2} = \frac{\varphi_1}{I_2}\Big|_{I_1 = 0} \quad \text{și} \quad L_{21} = \frac{\varphi_{21}}{I_1} = \frac{\varphi_2}{I_1}\Big|_{I_2 = 0} \tag{19}$$

sînt inductivitățile lor mutuale, avînd proprietatea de reciprocitate $L_{12} = L_{21} = M$.

Scanned with OKEN Scanner

Legea inducției electromagnetice

Tensiunea electromotoare e indusă de-a lungul unei curbe închise (c) (fig. 11) este

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} \tag{20}$$

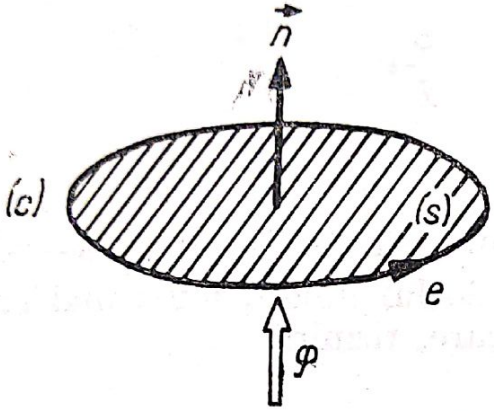


Fig. 11.

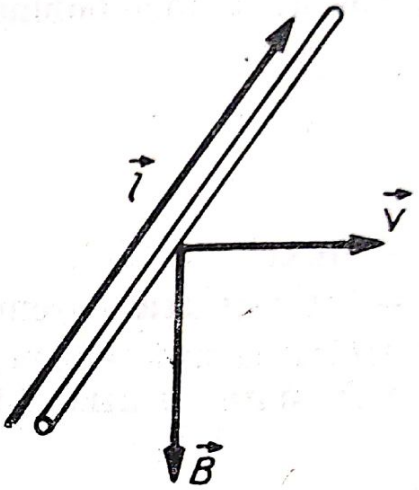


Fig. 12.

unde φ este fluxul magnetic printr-o suprafață (S), ce se sprijină pe curba (c), sensul pozitiv al normalei la suprafață fiind asociat cu regula burghiului cu sensul pozitiv ales pe curba (c).

Tensiunea electromotoare indusă într-un conductor rectiliniu care se deplasează cu viteza $\vec{v}$ într-un cîmp magnetic de inducție $\vec{B}$ (fig. 12) :

$$e = \vec{l}\,(\vec{v} \times \vec{B}), \tag{21}$$

unde l — lungimea orientată a conductorului, avînd sensul determinat de sensul de referință în lungul conductorului.

Mașina electrică de curent continuu

Schemele echivalente ale mașinii de curent continuu sînt reprezentate în fig. 13, pentru cazul funcționării în regim de generator (a) și, respectiv, în regim de motor (b). S-au notat : R — rezistența înfășurării rotorului, R_e — rezistența înfășurării statorului (înfășurarea de excitație), I — intensitatea curentului rotoric, I_e — intensitatea

curentului de excitaţie, E — t.e.m. indusă în înfăşurarea rotorului, U — tensiunea la bornele acestuia, φ_e — fluxul magnetic de excitaţie.

Tensiunea electromotoare indusă în înfăşurarea rotorului, cînd acesta are turaţia n, este

$$E = K_e \varphi_e n, \tag{22}$$

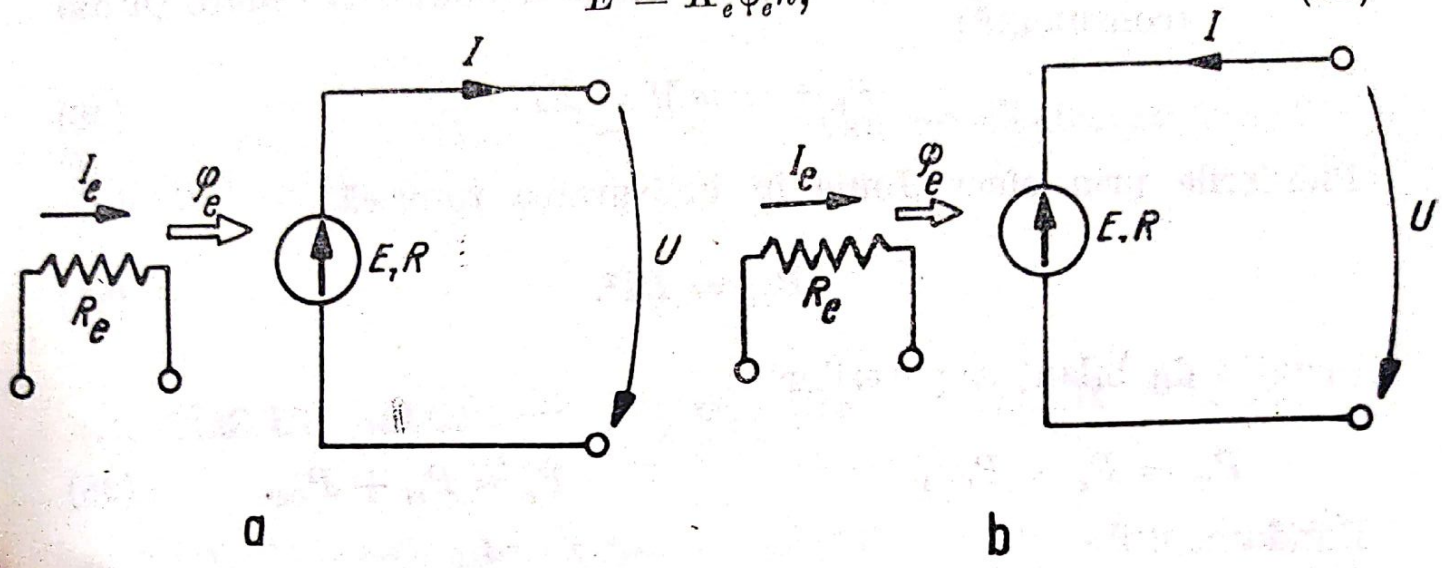


Fig. 13.

sau, considerînd φ_e aproximativ proporţional cu I_e,

$$E \approx k_e I_e n, \tag{22'}$$

unde K_e şi k_e sînt constante de proporţionalitate ce depind de construcţia maşinii. S-a neglijat reacţia indusului.

Momentul electromagnetic exercitat asupra rotorului are expresia

$$M = K_m \varphi_e I \approx k_m I_e I, \tag{23}$$

unde :

$$K_m = \frac{K_e}{2\pi}, \quad k_m = \frac{k_e}{2\pi}.$$

a) *Regimul de generator* b) *Regimul de motor*

Ecuaţia circuitului rotoric

$$E = U + RI, \qquad U = E + RI. \tag{24}$$

Puterea electrică cedată (utilă) Puterea electrică primită (consumată)

$$P_e = UI. \tag{25}$$

Puterea mecanică primită (consumată) Puterea mecanică cedată (utilă)

$$P_m = 2\pi n M = EI. \tag{26}$$

Pierderile prin efect Joule în înfăşurarea rotorică,

$$P_{Cu} = RI^2. \tag{27}$$

Ecuaţia de bilanţ a puterilor

$$P_m = P_e + P_{Cu}, \qquad P_e = P_m + P_{Cu}. \tag{28}$$

Randamentul

$$\eta = \frac{P_e}{P_m} = \frac{U}{E}, \qquad \eta = \frac{P_m}{P_e} = \frac{E}{U}. \tag{29}$$

S-au neglijat puterile pierdute în fier şi prin frecări. S-a considerat cazul excitaţiei separate.

Motorul asincron

Turaţia cîmpului magnetic învîrtitor produs de o înfăşurare trifazată cu p perechi de poli, parcursă de un sistem trifazat simetric de curenţi cu frecvenţa ν este

$$n_0 = \frac{\nu}{p} \text{ rot/s} = \frac{60\nu}{p} \text{ rot/min}. \tag{30}$$

Alunecarea rotorului

$$s = \frac{n_0 - n}{n_0}, \tag{31}$$

unde n este turaţia rotorului.

Scanned with OKEN Scanner

Forța portantă a unui electromagnet, cînd armătura este în contact cu fețele polilor, este

$$F = \frac{B^2 S}{2\mu_0}, \tag{32}$$

unde B este inducția magnetică produsă de electromagnet, S — suprafața polului magnetic.

* * *

4.1. CÎMPUL MAGNETIC AL CONDUCTOARELOR PARCURSE DE CURENT ELECTRIC

4.1.1. Calculați intensitatea și inducția magnetică a cîmpului produs de un conductor rectiliniu foarte lung, situat în vid și parcurs de un curent cu intensitatea $I = 10$ A, într-un punct aflat la distanța $r = 10$ cm de conductor.

4.1.2. (R) Două conductoare rectilinii foarte lungi sînt dispuse paralel la o distanță $d = 20$ cm în vid. Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic și inducția magnetică în punctele M, N, P situate ca în figură, dacă intensitățile curenților din cele două conductoare sînt $I_1 = 10$ A; $I_2 = 20$ A.

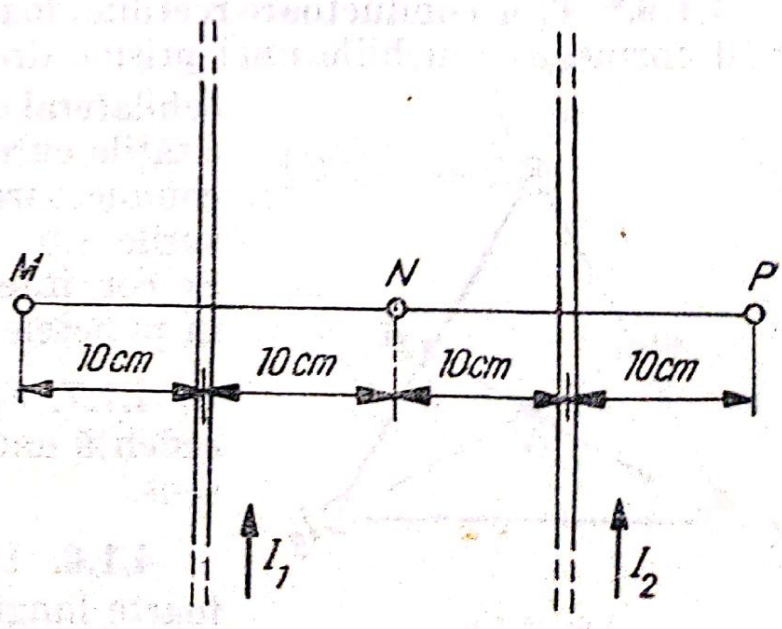


Fig. 4.1.2.

4.1.3. Rezolvați problema precedentă pentru cazul în care cei doi curenți au sensuri contrare.

4.1.4. Trei conductoare rectilinii foarte lungi sînt dispuse paralel și în același plan, ca în figura alăturată. Intensitățile curenților sînt egale $I_1 = I_2 = I_3 = 10$ A. Să se reprezinte grafic variația intensității cîmpului magnetic în lungul axei Ox, perpendiculară pe cele

Scanned with OKEN Scanner

trei conductoare, originea O fiind aleasă pe conductorul din mijloc. Se consideră sensul pozitiv pentru cîmpul magnetic orientat dinspre planul hîrtiei spre observator.

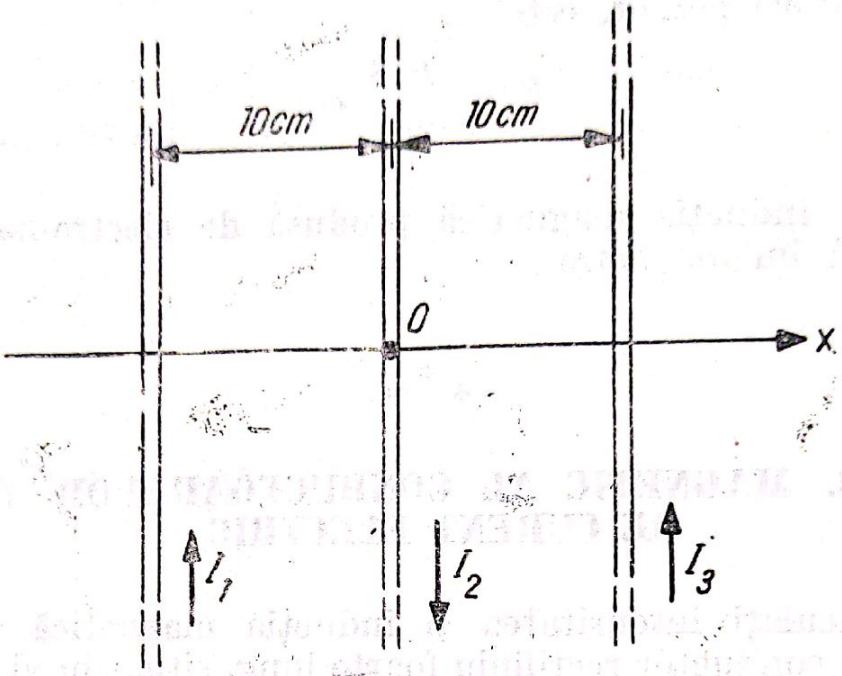


Fig. 4.1.4.

4.1.5. Să se rezolve problema precedentă pentru cazul cînd curenții din cele trei conductoare au același sens.

4.1.6.* Trei conductoare rectilinii foarte lungi sînt dispuse astfel încît formează muchiile unei prisme drepte avînd baza un triunghi echilateral cu latura $l = 10\sqrt{3}$ cm. Intensitățile curenților care parcurg cele trei conductoare sînt egale $I = 5$ A, iar sensurile sînt cele reprezentate în figură. Se cer intensitățile cîmpului magnetic în punctele M, N și P.

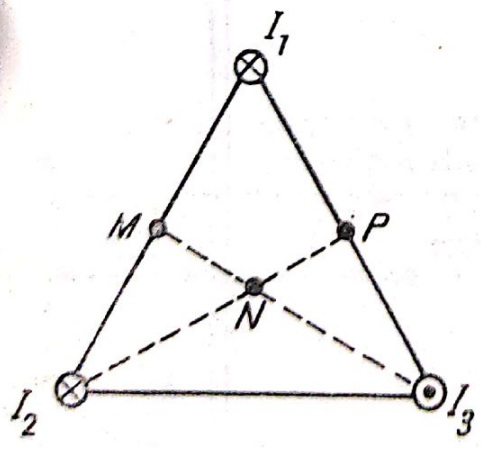


Fig. 4.1.6.

4.1.7. Să se rezolve problema precedentă dacă cei trei curenți au același sens.

4.1.8. Două conductoare rectilinii foarte lungi sînt dispuse în același plan, perpendicular unul pe celălalt. Să se calculeze intensitățile cîmpului magnetic produs de cele două conductoare în punctele M, N, P și Q, dacă intensitățile curenților sînt $I_1 = I_2 = 6{,}28$ A. Se dă $a = 1$ m.

Scanned with OKEN Scanner

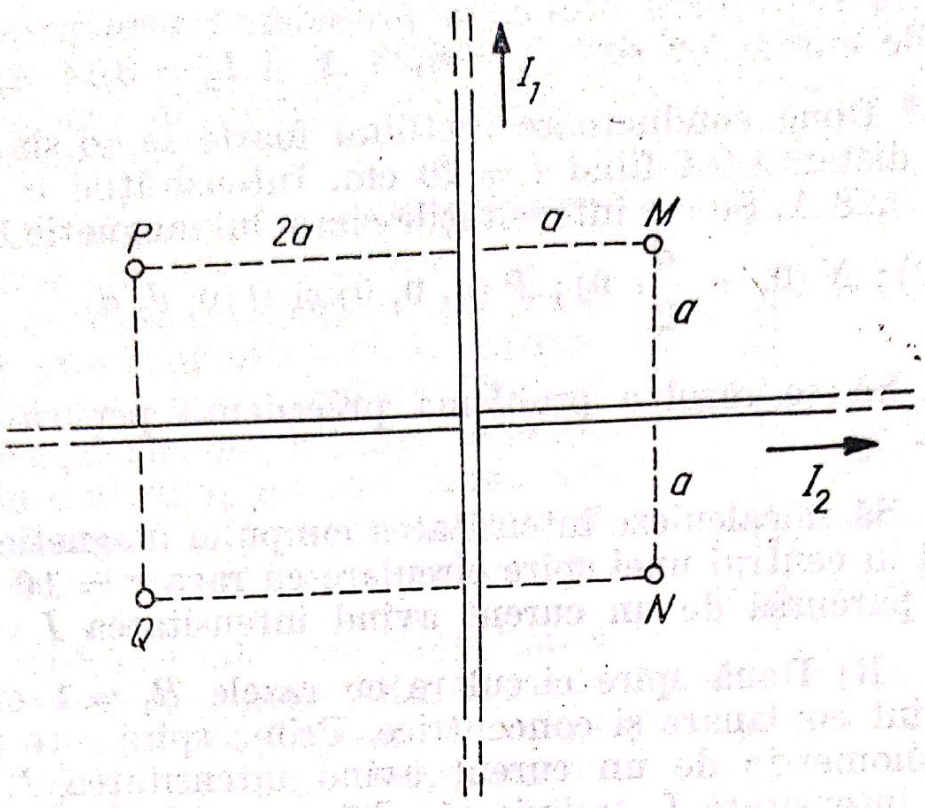


Fig. 4.1.8.

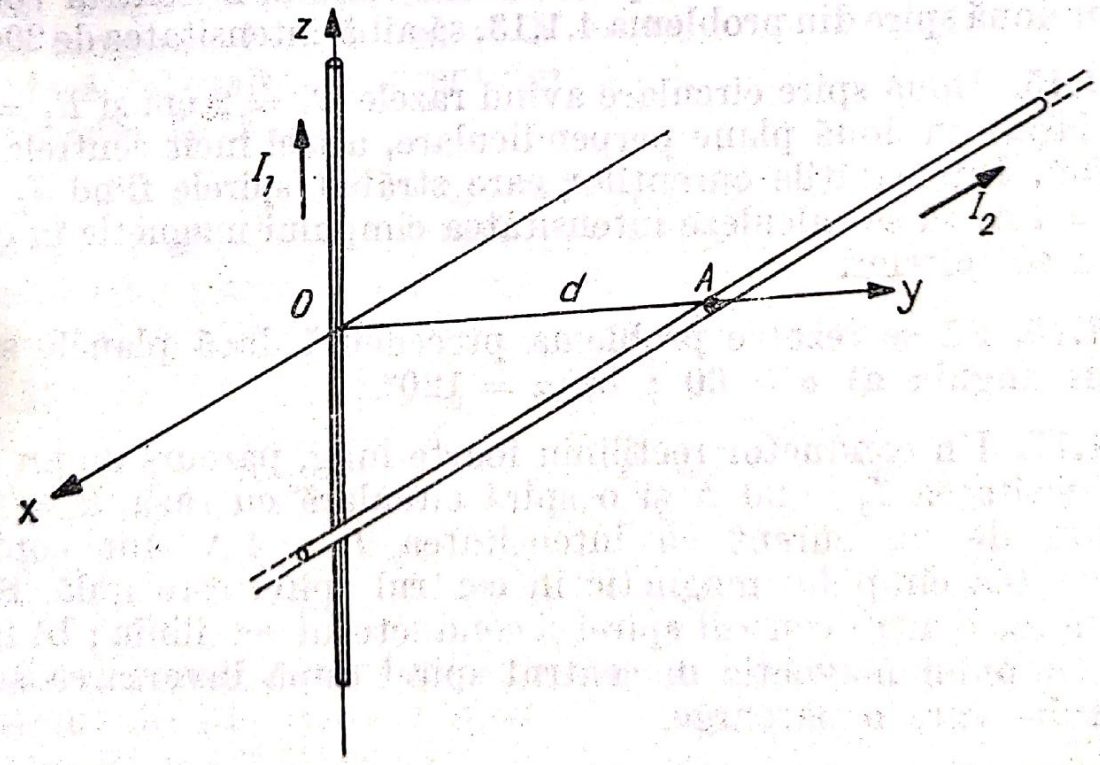


Fig. 4.1.10.

Scanned with OKEN Scanner

4.1.9. Să se rezolve problema precedentă pentru cazul în care intensităţile curenţilor sînt $I_1 = 6{,}28$ A şi $I_2 = 3{,}14$ A.

4.1.10.* Două conductoare rectilinii foarte lungi sînt dispuse ca în figură, distanţa OA fiind $d = 20$ cm. Intensităţile curenţilor sînt egale $I = 6{,}28$ A. Se cer intensităţile cîmpului magnetic în punctele: $M\left(0, \frac{d}{2}, 0\right)$; $N\left(0, -\frac{d}{2}, 0\right)$; $P(d, 0, 0)$ şi $Q(0, d, d)$.

4.1.11. Să se rezolve problema precedentă pentru $I_2 = 2I_1 = 6{,}28$ A.

4.1.12. Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic şi inducţia magnetică în centrul unei spire circulare cu raza $r = 10$ cm, situată în vid şi parcursă de un curent avînd intensitatea $I = 1$ A.

4.1.13. (R) Două spire circulare cu razele $R_1 = 1$ cm şi $R_2 = 2$ cm sînt coplanare şi concentrice. Prima spiră este parcursă în sens trigonometric de un curent avînd intensitatea $I_1 = 3$ A. Ce sens şi ce intensitate I_2 trebuie să aibă curentul din cea de-a doua spiră pentru ca intensitatea cîmpului magnetic din centrul O al celor două spire să fie nul?

4.1.14. Să se determine I_2 astfel încît cîmpul, în centrul comun O al celor două spire din problema 4.1.13, să aibă intensitatea de 200 A/m.

4.1.15. Două spire circulare avînd razele $R_1 = 2$ cm şi $R_2 = 1$ cm sînt plasate în două plane perpendiculare, astfel încît centrele lor să coincidă. Intensităţile curenţilor care străbat spirele fiind $I_1 = 6$ A şi $I_2 = 4$ A, să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic în centrul comun al spirelor.

4.1.16. Să se rezolve problema precedentă dacă planele spirelor fac un unghi: a) $\alpha = 60°$; b) $\alpha = 120°$.

4.1.17. Un conductor rectiliniu foarte lung, parcurs de un curent cu intensitatea $I_1 = 20$ A şi o spiră circulară cu raza $R = 10$ cm, parcursă de un curent cu intensitatea $I_2 = 4$ A sînt coplanare. Intensitatea cîmpului magnetic în centrul spirei este nulă. Se cer: a) distanţa d între centrul spirei şi conductorul rectiliniu; b) intensitatea cîmpului magnetic în centrul spirei după inversarea sensului curentului care o parcurge.

4.1.18. Un conductor rectiliniu foarte lung este plasat în planul unei spire circulare, tangent la aceasta. Intensităţile curenţilor în conductorul rectiliniu şi în spiră sînt egale, iar sensurile lor sînt

Scanned with OKEN Scanner

orientate ca în figură, intensitatea cîmpului magnetic în centrul O al spirei fiind $H' = 41{,}4$ A/m. Să se calculeze intensitatea H'' a cîmpului magnetic din punctul O dacă se roteşte planul spirei cu 90° în jurul dreptei OM.

4.1.19. Un conductor rectiliniu foarte lung este paralel cu planul unei spire circulare cu raza de 10 cm, proiecţia sa pe acest plan trecînd prin centrul spirei. Intensităţile curenţilor din conductorul rectiliniu şi din spiră sînt egale, iar intensitatea cîmpului magnetic din centrul spirei face unghi de 45° cu planul acesteia. Se cere distanţa d între conductorul rectiliniu şi planul spirei.

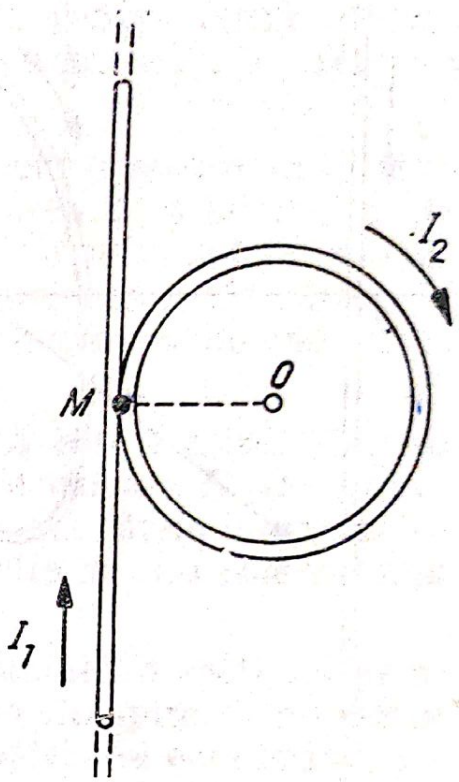


Fig. 4.1.18.

4.1.20. (R) Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic în punctul O din figura alăturată. Raza spirei circulare este R=0,1 m iar $OA = OB = l = 0{,}2$ m. Intensităţile curenţilor sînt $I_1 = I_2 = 6{,}28$ A şi $I_3 = 1$ A.

4.1.21. Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic de pe axa unui solenoid cu lungimea $l = 50$ cm şi $N = 500$ spire, dacă intensitatea curentului care îl parcurge este de 1 A.

4.1.22. Care este fluxul printr-o spiră şi fluxul total al solenoidului din problema precedentă, dacă aria unei spire este $S = 10$ cm^2, iar solenoidul este plasat în aer şi nu are miez feromagnetic? Se presupune cîmpul magnetic uniform pe secţiunea solenoidului.

4.1.23. (R) Un solenoid este realizat din s = 18,84 m de sîrmă izolată cu diametrul exterior $d = 0{,}5$ mm, bobinată într-un singur rînd, spiră lîngă spiră, pe un cilindru dielectric suficient de lung, cu diametrul exterior $D = 20$ mm. Se cere cîmpul magnetic pe axa solenoidului cînd înfăşurarea este parcursă de un curent cu intensitatea $I = 1$ A. Care este fluxul total al solenoidului în acest caz?

4.1.24. Un solenoid avînd lungimea $l = 1$ m şi $N = 1000$ spire este parcurs de un curent cu intensitatea $I_1 = 1$ A. O spiră circulară avînd raza $R = 0{,}2$ m este plasată coaxial cu solenoidul, în mijlocul acestuia. Ce intensitate I_2 trebuie să aibă curentul care străbate spira circulară pentru ca în centrul acesteia cîmpul magnetic să fie nul?

Scanned with OKEN Scanner

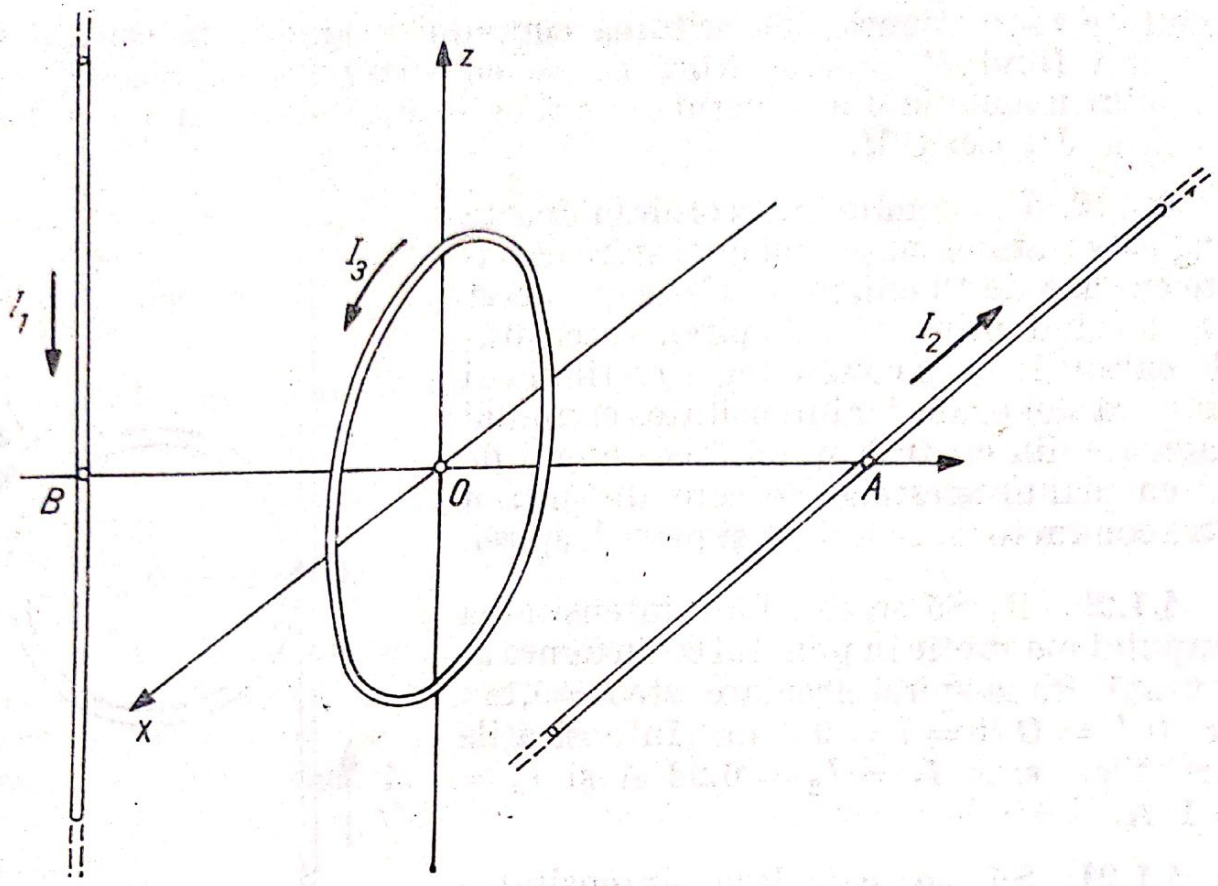


Fig. 4.1.20.

4.1.25. (R) Trebuie construită o bobină pentru care intensitatea cîmpului magnetic pe ax să fie $H = 2000$ A/m cînd înfăşurarea bobinei, realizată dintr-o sîrmă izolată cu diametrul exterior $d = 1$ mm, este străbătută de un curent cu intensitatea $I = 1$ A. În cîte straturi (egale) trebuie dispusă înfăşurarea bobinei? Se presupune că diametrul bobinei este mic faţă de lungimea sa şi că spirele sînt bobinate strîns una lîngă alta.

4.1.26. (R) Un solenoid avînd lungimea $l = 0{,}5$ m şi diametrul $D = 4$ cm este realizat dintr-o sîrmă de cupru îmbrăcată într-un înveliş izolant şi avînd diametrul firului metalic $d = 1$ mm, bobinată într-un singur strat, spiră lîngă spiră. Tensiunea aplicată la bornele bobinei este $U = 1{,}36$ V. Se cere intensitatea cîmpului magnetic în interiorul bobinei — rezistivitatea cuprului este $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ω m.

4.2. FLUXURI. INDUCTIVITĂŢI

4.2.1. Un cadru dreptunghiular avînd laturile $a = 10$ cm, $b = 5$ cm este plasat într-un cîmp magnetic omogen avînd intensitatea $H = 10^4$ A/m, care face un unghi $\alpha = 30°$ cu normala la planul cadrului. Se cere fluxul magnetic ce străbate cadrul.

4.2.2. Să se calculeze inductivitatea unui solenoid fără miez feromagnetic, avînd $N = 1000$ de spire, lungimea $l = 25$ cm şi aria secţiunii $S = 2$ cm^2. Se va considera cîmpul magnetic aproximativ omogen în interiorul solenoidului.

4.2.3. Să se rezolve problema precedentă pentru cazul în care solenoidul are un miez feromagnetic cu permeabilitatea relativă $\mu_r = 500$.

4.2.4. O bobină cu înfăşurarea într-un singur strat are inductivitatea $L = 10$ mH. Să se calculeze inductivitatea L' a bobinei după completarea înfăşurării cu un al doilea strat, cuprinzînd un număr de spire egal cu al primului. Se neglijează grosimea înfăşurărilor în raport cu diametrul bobinei şi se consideră lungimea bobinei mult mai mare decît diametrul ei.

4.2.5. Un solenoid avînd inductivitatea L este realizat dintr-o sîrmă elastică, avînd forma unui arc spiral. Ce valoare L' are inductivitatea bobinei în urma unei deformări în cursul căreia lungimea sa se dublează? Se presupune că numărul de spire şi aria solenoidului nu se modifică.

4.2.6.* (R) În figura alăturată este reprezentată o secţiune printr-un sistem de două bobine avînd $N_1 = 400$ de spire şi respectiv $N_2 = 80$ de spire. Dimensiunile sînt în milimetri. Se cere inductivitatea mutuală între cele două bobine.

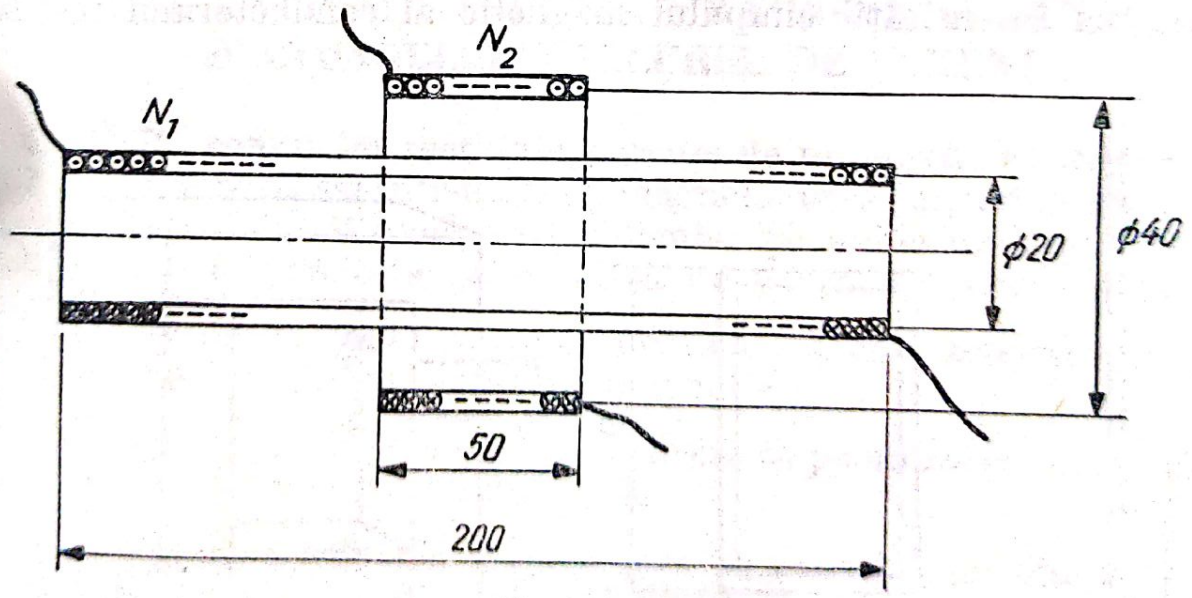


Fig. 4.2.6.

4.2.7.* (R) Să se calculeze inductivitatea mutuală între cele două bobine reprezentate în secţiune în figura alăturată. Dimensiunile sînt în milimetri. Bobinele au $N_1 = 800$ de spire şi $N_2 = 40$ de spire.

Scanned with OKEN Scanner

Unghiul din axele bobinelor este : a) $\alpha = 0$; b) $\alpha = 30°$; c) $\alpha = 60°$; d) $\alpha = 90°$.

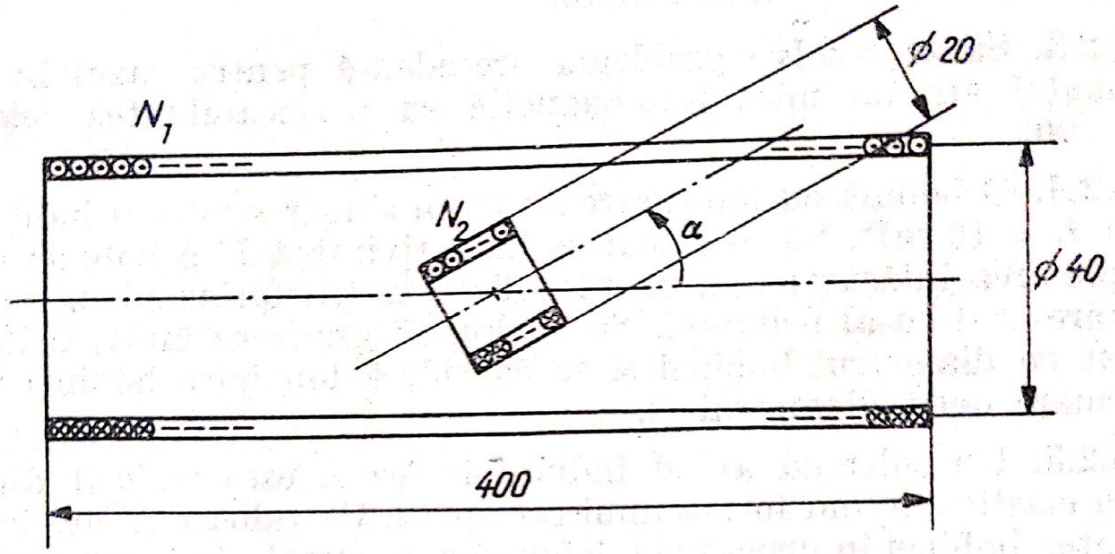


Fig. 4.2.7.

4.2.8.* (R) Un conductor rectiliniu foarte lung, parcurs de un curent cu intensitatea $I = 10$ A, este plasat în planul unui cadru dreptunghiular, paralel cu două din laturile acestuia, ca în figura alăturată. Se dau : $a = c = 20$ cm ; $b = 30$ cm. Se cer : a) graficul variației intensității cîmpului magnetic al conductorului rectiliniu

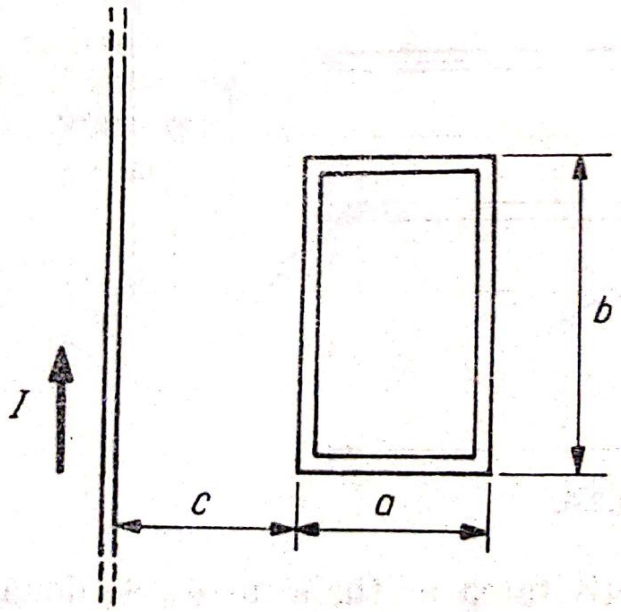


Fig. 4.2.8.

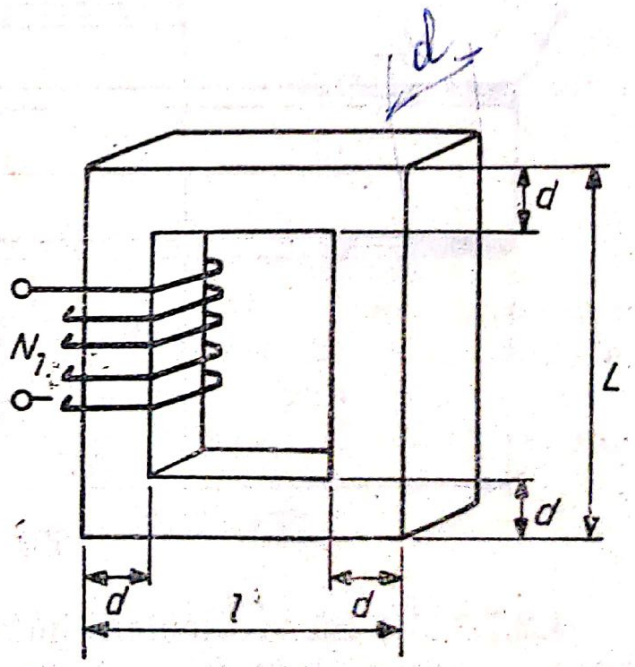


Fig. 4.2.9.

în funcţie de distanţa r de la acesta pentru $r \in [20 ; 40]$ cm ; b) fluxul magnetic ce străbate cadrul ; c) inductivitatea mutuală între conductorul filiform şi cadru.

4.2.9. (R) Pe circuitul magnetic din figură, realizat dintr-un material avînd permeabilitatea relativă $\mu_r = 400$ şi avînd dimensiunile $d = 10$ mm, $l = 50$ mm ; $L = 60$ mm, sînt înfăşurate $N = 1000$ de spire ale unei bobine. Se cer : a) fluxul care străbate secţiunea circuitului magnetic cînd înfăşurarea bobinei este parcursă de un curent cu intensitatea $I = 2$ A ; b) fluxul total care străbate înfăşurarea bobinei în acest caz ; c) inductivitatea L a bobinei. Se presupune cîmpul uniform în întregul circuit magnetic şi se neglijează dispersia.

4.2.10. Pe circuitul magnetic din problema 4.2.9 se bobinează o a doua înfăşurare avînd $N' = 500$ spire. Se cer : a) inductivitatea L' a acestei bobine ; b) inductivitatea mutuală M între cele două bobine. Se presupune cîmpul uniform în întregul circuit magnetic şi se neglijează dispersia.

4.2.11. Să se rezolve problema 4.2.9 dacă în una din coloanele circuitului magnetic se practică un intrefier de lărgime $\delta = 0{,}3$ mm, perpendicular pe coloană.

4.3. FORŢE EXERCITATE ÎN CÎMP MAGNETIC ASUPRA CONDUCTOARELOR PARCURSE DE CURENT

4.3.1. Un conductor rectiliniu parcurs de un curent cu intensitatea $I = 5$ A este plasat într-un cîmp magnetic omogen, avînd inducţia magnetică $B = 1{,}5$ Wb/m^2, perpendicular pe liniile de cîmp. Să se calculeze forţa exercitată pe unitatea de lungime a conductorului.

4.3.2. Rezolvaţi problema precedentă dacă conductorul face un unghi de 30° cu liniile cîmpului magnetic.

4.3.3. Să se calculeze forţa care se exercită pe unitatea de lungime a conductoarelor din problema 4.1.2.

4.3.4. Să se stabilească forţele care se exercită pe unitatea de lungime pentru fiecare din cele trei conductoare din : a) problema 4.1.4 ; b) problema 4.1.5.

4.3.5. Să se calculeze forţele care se exercită asupra unor porţiuni cu lungimea $a = 2$ m ale conductoarelor din figura 4.1.6 pentru variantele din a) problema 4.1.6 şi b) problema 4.1.7.

Scanned with OKEN Scanner

4.3.6. Ce forţe de interacţiune se exercită între conductoarele din figura 4.1.8?

4.3.7. (R) Să se stabilească forţa totală care acţionează asupra cadrului din problema 4.2.8, cînd acesta este străbătut de un curent avînd intensitatea $I' = 5$ A. Ce sens trebuie să aibă curentul din cadru pentru ca forţa rezultantă să fie o forţă de atracţie?

4.3.8. (R) Se măreşte distanţa între cadrul dreptunghiular şi conductorul rectiliniu din problema precedentă cu $d = 20$ cm. Se cere lucrul mecanic cheltuit.

4.3.9.* (R) Înfăşurarea unui solenoid cu secţiunea pătrată este separată în două jumătăţi printr-o fantă, în care se poate deplasa un conductor rectiliniu, ca în figură. Solenoidul are dimensiunile $l = 40$ cm, $a = 2$ cm şi un număr total $N = 1000$ de spire. Intensităţile

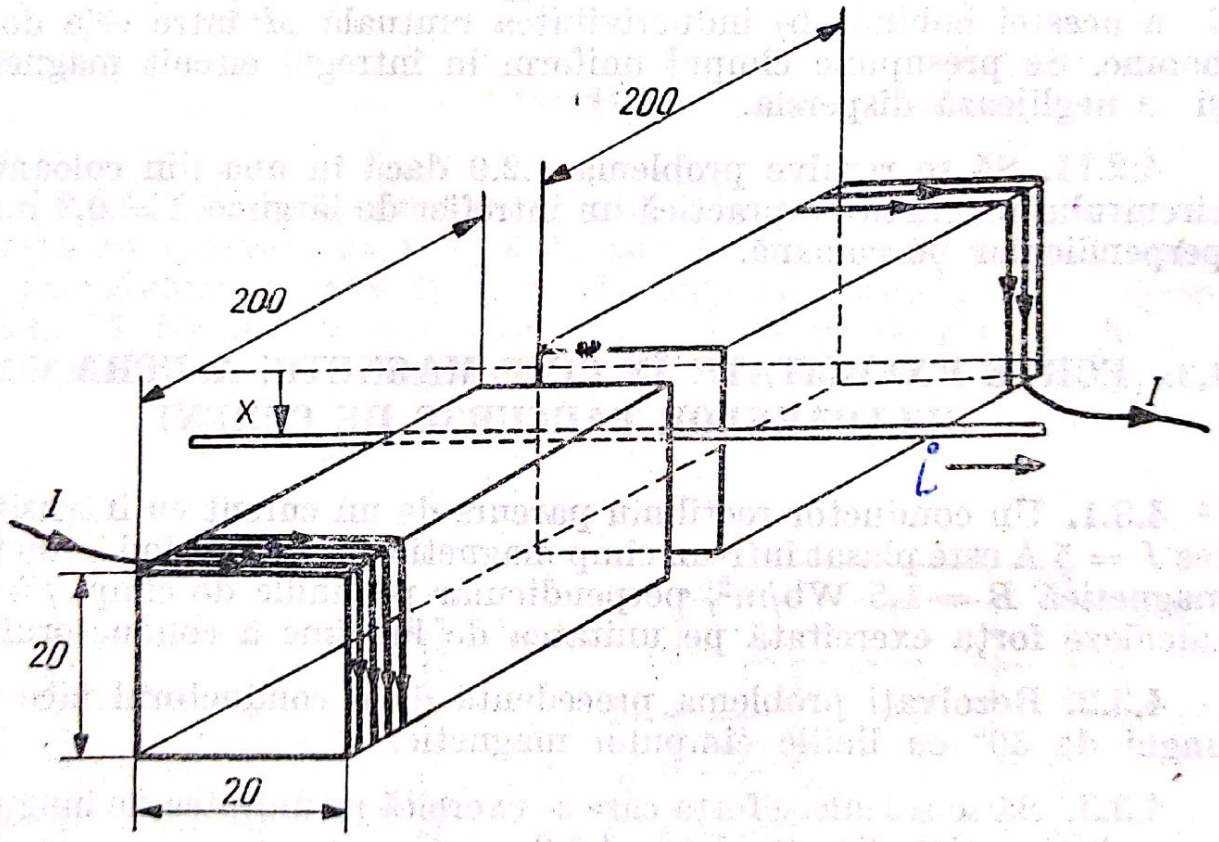


Fig. 4.3.9.

curenţilor sînt $i = 10$ A; $I = 1$ A. Se cer: a) forţa exercitată asupra conductorului rectiliniu; b) lucrul mecanic cheltuit pentru a deplasa conductorul rectiliniu paralel cu el însuşi pe toată lungimea fantei, în sens invers forţei exercitate de cîmpul magnetic. Se presupune uniform cîmpul magnetic din solenoid şi fanta suficient de îngustă pentru a nu perturba sensibil cîmpul.

Scanned with OKEN Scanner

4.3.10. Să se rezolve problema precedentă pentru cazul unui solenoid cu secțiunea circulară de rază $R = 1$ cm, restul datelor rămînînd neschimbate.

4.3.11. Două conductoare rectilinii foarte lungi, dispuse paralel a o distanță $r = 20$ cm, sînt parcurse de curenți avînd intensitățile $I_1 = 10$ A, $I_2 = 40$ A și același sens. Se cere lucrul mecanic pe unitatea de lungime a conductoarelor, cheltuit pentru a dubla distanța dintre acestea.

4.3.12. (R) Trei conductoare paralele, parcurse de curenți avînd aceeași intensitate $I = 10$ A și același sens, sînt dispuse paralel, într-un același plan, la distanțe $d = 10$ cm. Să se calculeze lucrul mecanic pe unitatea de lungime efectuat de sistem la deplasarea cu $\delta = 5$ cm a conductorului din mijloc. În timpul mișcării se păstrează coplanaritatea și paralelismul conductoarelor.

4.3.13. O bară conductoare MN de lungime $l = 0{,}2$ m alunecă fără frecare de-a lungul a două bare fixe, situate într-un cîmp magnetic omogen, ca în figură. Bara MN este parcursă de un curent

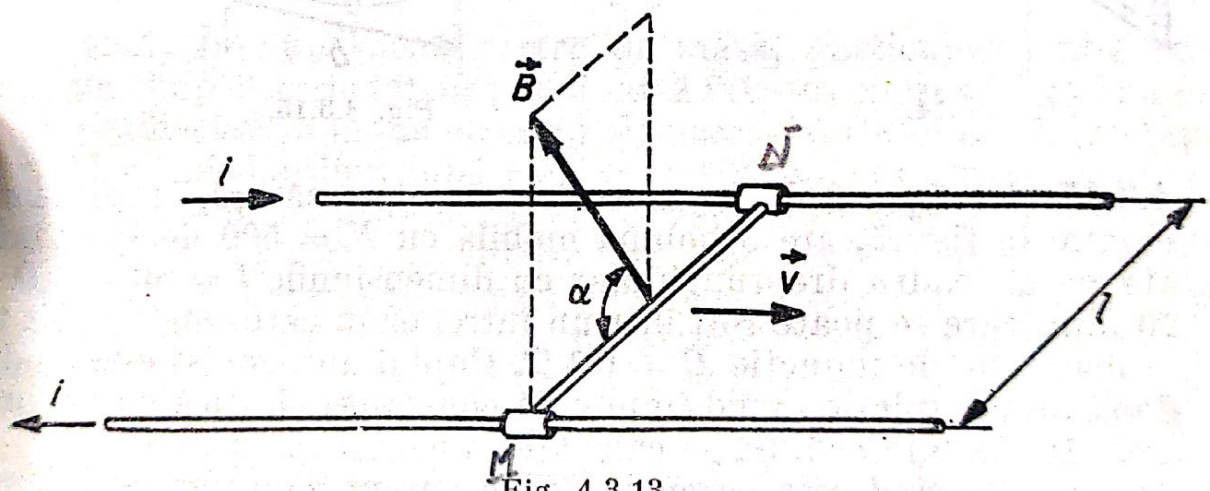


Fig. 4.3.13.

constant avînd intensitatea $i = 1$ A și se mișcă cu o viteză $v = 2$ m/s. Inducția magnetică a cîmpului omogen este $B = 0{,}2$ T și este orientată sub un unghi $\alpha = 30°$ față de direcția MN. Se cer: a) forța exercitată asupra barei; b) puterea mecanică cheltuită pentru mișcarea barei.

4.3.14.* (R) Un cadru pătrat cu latura $l = 10$ cm, parcurs de un curent cu intensitatea $i = 1$ A, este orientat perpendicular pe liniile unui cîmp magnetic omogen de inducție $B = 0{,}1$ T. Cadrul este rotit cu 90° în sensul indicat în figură. Se cer: a) lucrul mecanic

Scanned with OKEN Scanner

cheltuit din exterior pentru rotirea cadrului; b) momentul exercitat asupra cadrului în poziția inițială și în noua poziție.

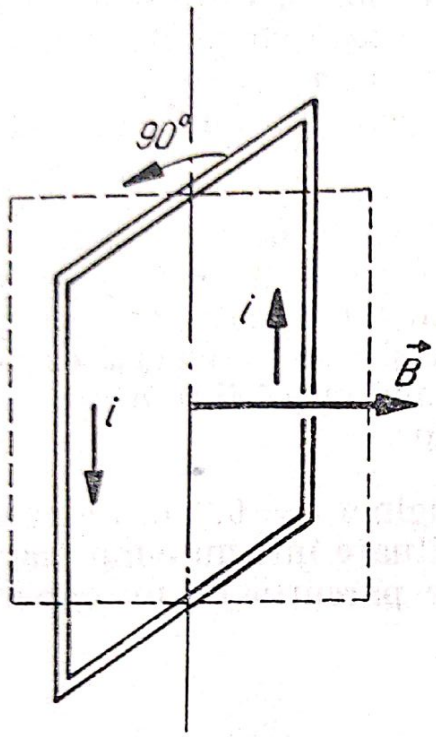


Fig. 4.3.14.

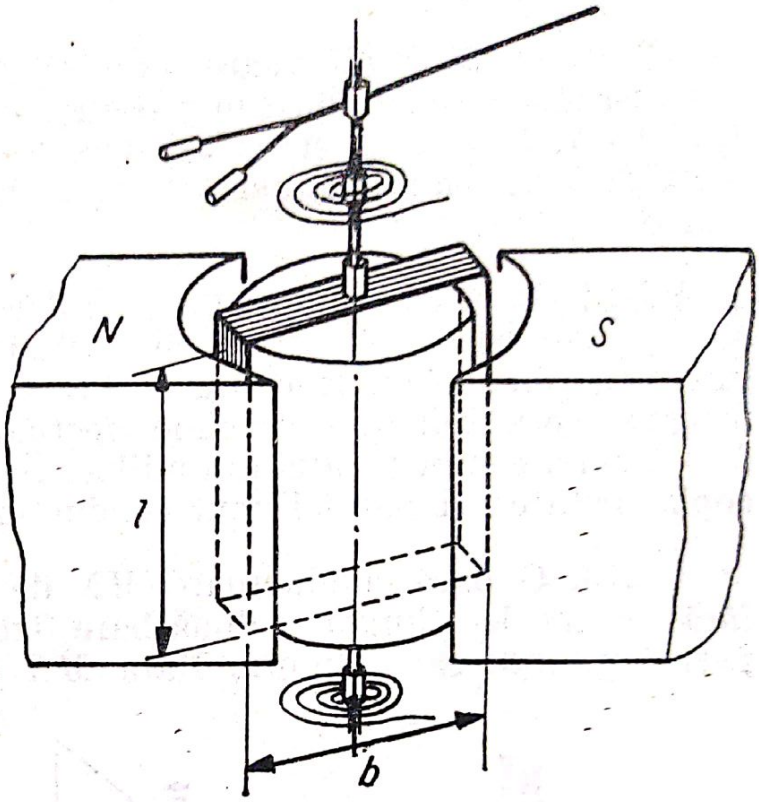


Fig. 4.3.15.

4.3.15. (R) Aparatul magnetoelectric de măsură, reprezentat schematic în figură, are o bobină mobilă cu $N = 500$ de spire înfășurate pe un cadru dreptunghiular cu dimensiunile $l = 30$ m; $D = 20$ mm, care se poate roti într-un întrefier în care este stabilit un cîmp magnetic de inducție $B = 0{,}1$ T. Cuplul antagonist este produs de două arcuri spirale avînd împreună constanta elastică de torsiune $k = 5 \cdot 10^{-7}$N · m/grd. Să se calculeze unghiul θ cu care se rotește bobina mobilă cînd este parcursă de un curent continuu cu intensitatea $I = 1$ mA. Care este constanta aparatului, dacă intervalul între două diviziuni de pe scala aparatului este de 3°?

4.4. MIȘCAREA CORPURILOR ÎNCĂRCATE ÎN CÎMP MAGNETIC

4.4.1. (R) Se poate schimba viteza unei particule încărcate sub acțiunea unui cîmp magnetic constant în timp?

4.4.2. (R) Cum se va mișca un electron care pătrunde într-un cîmp magnetic omogen cu o viteză ce face un unghi α față de liniile de cîmp?

Scanned with OKEN Scanner

4.4.3. Un electron avînd o viteză inițial $v_0 = 10^6$ m/s pătrunde într-un cîmp magnetic omogen de inducție $B = 10^{-3}$ T, perpendicular pe liniile de cîmp. Se cer: a) raza traiectoriei; b) perioada de rotație. Sarcina și masa electronului sînt $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C și $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

4.4.4. Rezolvați problema precedentă pentru cazul unui proton avînd sarcina $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C și masa $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

4.4.5. Calculați raportul razelor traiectoriilor unui electron și ale unui proton, care pătrund într-un același cîmp magnetic omogen, perpendicular pe liniile de cîmp a) avînd aceeași viteză inițială, b) după accelerarea sub aceeași diferență de potențial. Masa protonului este de aproximativ 1 836 de ori mai mare ca masa electronului.

4.4.6. Un fascicul colimat de particule α emise cu o energie $W = 6{,}048$ MeV de o sursă radioactivă de ThC pătrunde perpendicular într-un cîmp magnetic de inducție $B = 1$ T. Se cer: a) viteza particulelor; b) raza cercului pe care se vor roti în cîmpul magnetic. Particulele α au sarcina $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C și masa $m = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg, $1\,\text{MeV} = 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ J. $= 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ J

4.4.7. Într-un spectrometru de masă, particulele sînt accelerate de un cîmp electric intens; apoi intră într-un cîmp magnetic omogen, perpendicular pe liniile de cîmp ale acestuia. Să se calculeze raportul razelor traiectoriilor după care se mișcă în acest spectrometru ionii a doi izotopi ai litiului $^{3}_{6}\text{Li}$ și $^{3}_{7}\text{Li}$, simplu ionizați.

4.4.8.* Diametrul duanților unui ciclotron pentru protoni este $D = 1$ m, iar frecvența tensiunii aplicată acestora este $f = 12$ MHz. Se cer: a) inducția magnetică a cîmpului produs de electromagnetul ciclotronului; b) energia finală maximă a protonilor accelerați. Sarcina și masa de repaus a protonilor sînt $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C și $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg. Se neglijează variația relativistă a masei în timpul accelerării protonilor.

4.4.9. Ce viteză este necesară unui electron, pentru ca mișcîndu-se orizontal, perpendicular pe direcția cîmpului magnetic terestru, să rămînă mereu la aceeași înălțime? Componenta orizontală a intensității cîmpului magnetic terestru este $H_0 = 16$ A/m, iar accelerația gravității $g = 9{,}8$ m/s^2. Sarcina și masa electronului sînt $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C și $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

4.4.10. Un electron avînd viteza $v_0 = 10^6$ m/s pătrunde într-un cîmp magnetic omogen, cu inducția $B = 10^{-4}$ T, sub un unghi $\alpha = 45°$ față de liniile de cîmp. Să se calculeze raza și pasul elicei

Scanned with OKEN Scanner

cilindrice pe care se mişcă electronul în cîmp. Sarcina şi masa electronului sînt $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C şi $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

4.4.11. (R) Un proton accelerat sub o diferenţă de potenţial de $U = 200$ V pătrunde în cîmpul magnetic al unui solenoid, sub un unghi $\alpha = 30°$ faţă de axa acestuia. Solenoidul are lungimea $l = 50$ cm, raza $R = 5$ cm şi $N = 2000$ de spire. Să se calculeze intensitatea I a curentului care trebuie să parcurgă solenoidul astfel încît traiectoria elicoidală a protonului să rămînă înscrisă în interiorul solenoidului. Se dau sarcina şi masa protonului $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C şi $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

4.4.12.* Un fascicul electronic, accelerat într-un cîmp electrostatic, sub o diferenţă de potenţial de 1 kV pătrunde într-un cîmp magnetic omogen, perpendicular pe liniile de cîmp, ca în figură. Lărgimea zonei în care există cîmpul magnetic este $l = 5$ cm, iar la o distanţă

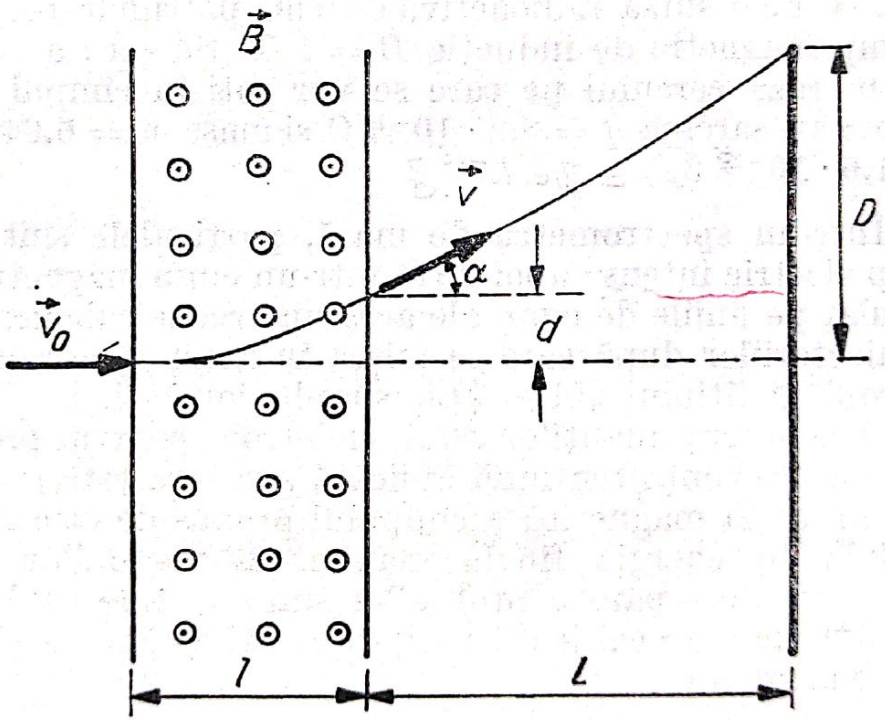


Fig. 4.4.12.

$L = 25$ cm de la ieşirea din cîmpul magnetic, fasciculul loveşte un ecran fluorescent pe care apare un spot luminos. Inducţia cîmpului magnetic este $B = 10^{-3}$ T. Se cer: a) raza traiectoriei descrise de fascicul în cîmpul magnetic; b) abaterea d din planul median şi unghiul α pe care îl face fasciculul la ieşirea din cîmpul magnetic faţă de direcţia sa iniţială; c) distanţa D între poziţia deplasată a spotului şi poziţia sa în lipsa cîmpului magnetic. Sarcina şi masa electronului sînt $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C şi $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Scanned with OKEN Scanner

4.4.13. Un electron pătrunde într-o regiune în care există un cîmp electric omogen şi un cîmp magnetic omogen. Viteza iniţială $\vec{v}_0$ a electronului, intensitatea $\vec{E}$ a cîmpului electric şi inducţia $\vec{B}$ a cîmpului magnetic sînt perpendiculare două cîte două. Ce relaţie trebuie să existe între $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ pentru ca electronul să se mişte rectiliniu sub efectul combinat al celor două cîmpuri?

4.4.14. (R) O bandă metalică avînd $d = 0{,}1$ mm este parcursă de un curent cu intensitatea $I = 20$ A. Banda este plasată într-un cîmp magnetic omogen de inducţie $B = 1$ T, orientat ca în figură.

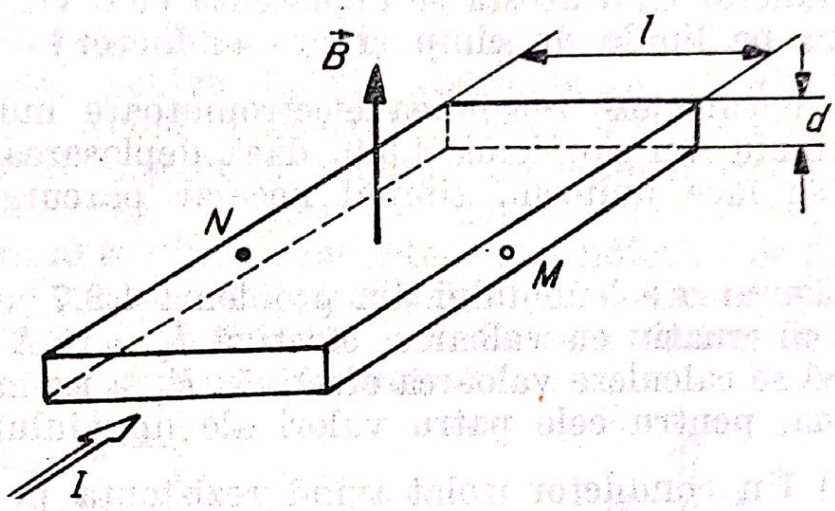


Fig. 4.4.14.

Numărul electronilor din unitatea de volum a metalului din care este constituită banda este $n = 10^{28}$ m^{-3}. Să se determine tensiunea care apare între punctele M şi N (efectul Hall). Se presupune că electronii se mişcă liber în metal.

4.5. INDUCŢIA ELECTROMAGNETICĂ

4.5.1. O spiră avînd aria $S = 2$ cm^2 este situată într-un cîmp magnetic omogen avînd liniile de cîmp perpendiculare pe planul spirei. Inducţia magnetică a cîmpului creşte uniform cu 0,1 T/s. Să se calculeze tensiunea electromotoare indusă în spiră.

4.5.2. O spiră cu aria $S = 2$ cm^2 situată într-un cîmp magnetic omogen de inducţie $B = 0{,}5$ T se roteşte uniform, cu o turaţie $\nu = 2$ rot/s, în jurul unei axe perpendiculare pe liniile de cîmp. Să se exprime variaţia în timp a fluxului magnetic prin spiră şi a t.e.m.

Scanned with OKEN Scanner

induse în aceasta. Se alege originea timpului într-un moment în care fluxul este maxim.

4.5.3.* O spiră cu aria $S = 10$ cm^2 se rotește uniform cu turația $\nu = 1800$ rot/min. Spira este plasată într-un cîmp magnetic de inducție $B = 0{,}1$ T, astfel încît în ea se induce o t.e.m., avînd valoarea maximă $E_{max} = 9{,}52$ mV. Să se determine unghiul α între axa de rotație a spirei și liniile cîmpului magnetic.

4.5.4. Un conductor rectiliniu avînd lungimea $l = 20$ cm se află într-un cîmp magnetic omogen de inducție $B = 1$ T și este orientat perpendicular pe liniile de cîmp. Ce tensiune electromotoare se induce în conductor cînd acesta se deplasează cu o viteză de 2 m/s, perpendiculară pe liniile de cîmp și pe conductor?

4.5.5. Să se calculeze tensiunea electromotoare indusă în conductorul rectiliniu din problema 4.3.9, dacă deplasarea sa în fanta solenoidului se face uniform, timpul necesar parcurgerii acesteia fiind $T = 1$ s.

4.5.6. Înfășurarea solenoidului din problema 4.2.7 este parcursă de un curent alternativ cu valoarea efectivă $I_1 = 10$ A și frecvența $\nu = 50$ Hz. Să se calculeze valoarea efectivă E_2 a t.e.m. induse în bobina a doua, pentru cele patru valori ale unghiului α.

4.5.7.* (R) Un conductor izolat avînd rezistența pe unitatea de lungime $R_l = 1\ \Omega$/m este aranjat sub forma a două cercuri de raze

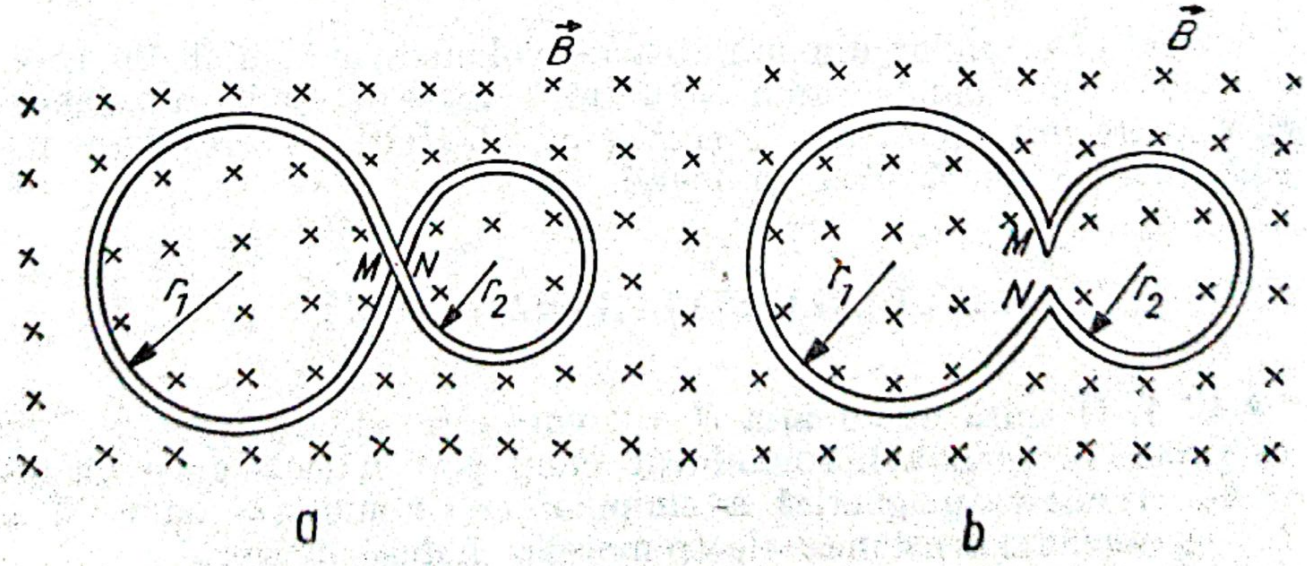


Fig. 4.5.7.

$r_1 = 20$ cm și $r_2 = 10$ cm, ca în figurile 4.5.7, a și b. Sistemul este plasat într-un cîmp magnetic omogen, avînd inducția B perpendiculară pe planul cercurilor și uniform crescătoare în timp cu 0,05 T/s.

Scanned with OKEN Scanner

Se cer: a) t.e.m. indusă în conductor; b) curentul prin acesta; c) tensiunea între punctele M și N, în cele două cazuri.

4.5.8. Conductorul rectiliniu din figura 4.2.8 este parcurs de un curent alternativ a cărui intensitate variază în timp după legea: $i = 10\sqrt{2}\sin 100\,t$ [A], timpul fiind exprimat în secunde. Să se scrie legea de variație în timp a t.e.m. induse în cadrul dreptunghiular.

4.5.9. Să se calculeze valoarea efectivă I_1 a intensității curentului sinusoidal de pulsație $\omega = 1000$ rad/s, care străbate cele N_1 spire ale solenoidului din figura 4.2.6, dacă tensiunea sinusoidală ce apare la bornele celei de-a doua bobine, neconectată într-un circuit electric, are valoarea efectivă $U_2 = 1$ V.

4.5.10.* În figură este reprezentat schematic un debitmetru electromagnetic pentru lichide conductoare. Conducta prin care curge lichidul, avînd diametrul interior $d = 10$ cm, este plasată între polii unui magnet ce produce un cîmp magnetic omogen, de inducție $B = 5 \cdot 10^{-2}$ T, perpendicular pe axa conductei. La capetele unui diametru al secțiunii conductei, perpendicular pe liniile cîmpului magnetic, sînt plasați doi electrozi a și b între care se măsoară o diferență de potențial $U = 0{,}5$ mV. Se cere debitul de volum D_v al lichidului care parcurge debitmetrul.

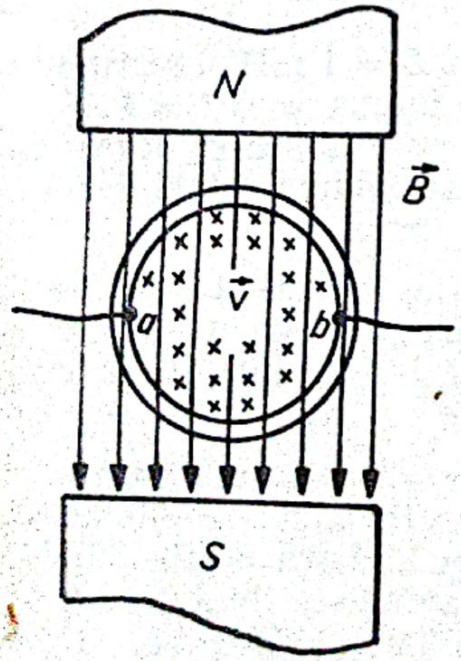


Fig. 4.5.10.

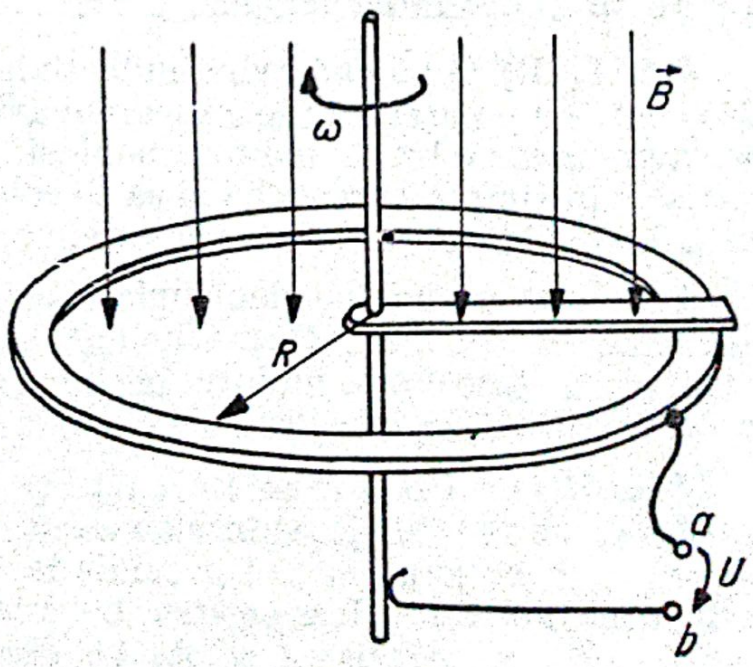


Fig. 4.5.11.

4.5.11.* O lamă îngustă fixată pe un ax se rotește solidar cu acesta cu o turație $\nu = 2$ rot/s. Capătul lamei este în contact permanent cu un inel fix de rază $R = 10$ cm. Sistemul este plasat într-un cîmp

Scanned with OKEN Scanner

magnetic omogen de inducție $B = 0{,}1$ T, paralel cu axul, ca în figură. Lama, axul și inelul sînt din cupru. Se cere tensiunea U_{ab}, între inel și ax.

4.5.12.* Un disc conductor avînd raza $R = 6$ cm se rotește cu o viteză unghiulară $\omega = 10$ rad/s într-un cîmp magnetic omogen de inducție $B = 0{,}2$ T, orientat paralel cu axul discului, ca în figură. Să se calculeze tensiunea U_{ab} ce apare între două perii, în contact cu periferia discului și, respectiv, cu axul acestuia, realizat de asemenea dintr-un material conductor.

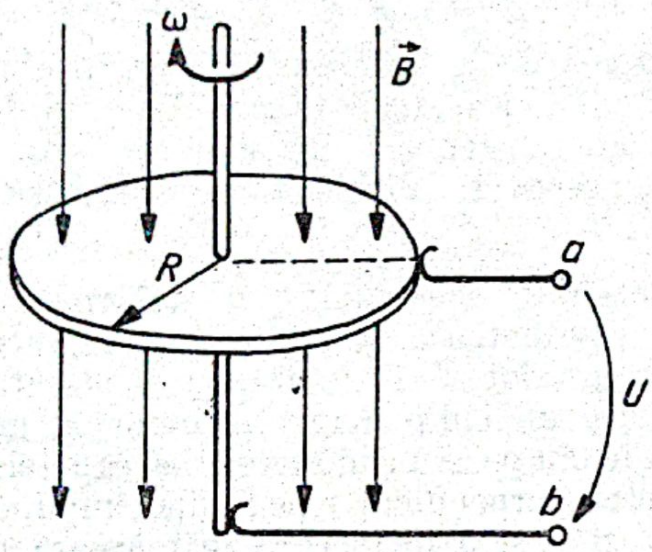


Fig. 4.5.12.

4.5.13. O bobină de inductivitate $L = 1$ mH este parcursă de un curent a cărui intensitate scade exponențial în timp conform relației $i = 10e^{-t}$[A], timpul fiind exprimat în secunde. Să se stabilească tensiunea electromotoare de autoinducție ce apare în înfășurarea bobinei.

4.5.14. (R) O bobină avînd inductivitatea $L = 1$ mH și rezistența $R = 1\ \Omega$ este parcursă de un curent avînd intensitatea $I = 1$ A. Se scurtcircuitează brusc bornele bobinei. Să se stabilească legea de variație în timp a curentului și să se calculeze căldura totală dezvoltată în bobină după scurtcircuitare.

4.5.15. Două bobine sînt cuplate magnetic, inductivitatea mutuală fiind $M = 2$ mH. Prima bobină este parcursă de un curent a cărui intensitate crește uniform în timp cu $\Delta I = 10$ A într-un interval $\Delta t = 2$ ms. Să se calculeze t.e.m. indusă în cea de-a doua bobină.

4.5.16.* (R) Un solenoid avînd secțiunea $S = 10$ cm^2 și $N = 100$ de spire este plasat într-un cîmp magnetic omogen de inducție $B = 0{,}1$ T cu axul paralel cu liniile de cîmp. La bornele solenoidului este conectat un galvanometru balistic *) avînd sensibilitatea $K = 2 \cdot 10^6$ div/C, rezistența totală a circuitului fiind $R = 100\ \Omega$. Se cere indicația galvanometrului balistic dacă se rotește brusc solenoidul cu $\alpha = 60°$ față de direcția inițială.

*) Galvanometrul balistic este un aparat de măsurare a cărui indicație este proporțională cu sarcina totală care îi străbate înfășurarea, cînd aceasta este parcursă, pentru un timp foarte scurt, de un curent electric.

Scanned with OKEN Scanner

4.5.17. O spiră în scurtcircuit, avînd rezistența $R = 0{,}1\ \Omega$, este parcursă de un flux magnetic $\varphi = 10^{-4}$ Wb produs de un electromagnet. Se cere să se calculeze sarcina totală care parcurge spira dacă : a) se întrerupe alimentarea electromagnetului ; b) se inversează curentul din înfășurarea acestuia.

4.5.18. (R) O spiră în scurtcircuit, avînd rezistența $R = 0{,}01\ \Omega$, se rotește uniform cu turația $\nu = 2$ rot/s într-un cîmp magnetic omogen, fluxul maxim ce străbate spira fiind $\Phi = 5 \cdot 10^{-5}$ Wb. Se cer : a) intensitatea maximă a curentului indus în spiră, b) puterea medie dezvoltată în spiră.

4.6. MIȘCAREA CONDUCTOARELOR ÎN CÎMP MAGNETIC

4.6.1. O bară perfect conductoare de lungime $l = 0{,}1$ m alunecă cu o viteză $v = 1$ m/s de-a lungul a două bare perfect conductoare paralele, legate printr-un rezistor de rezistență $R = 0{,}1\ \Omega$, ca în figură. Sistemul este plasat într-un cîmp magnetic uniform de in-

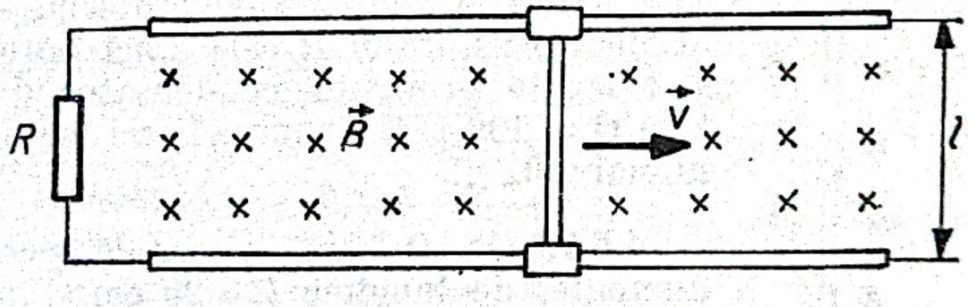


Fig. 4.6.1.

ducție $B = 1$ T, perpendiculară pe planul barelor. Se cer : a) t.e.m. indusă în bara mobilă ; b) intensitatea curentului prin aceasta ; c) forța cu care trebuie trasă bara mobilă pentru a se deplasa uniform cu viteza v ; d) puterea mecanică cheltuită și puterea dezvoltată în rezistorul R.

4.6.2.* Să se rezolve problema precedentă pentru cazul în care barele fixe nu sînt perfect conductoare, ci au o rezistență $R_l = 0{,}02\ \Omega/m$ ficcare. Se consideră că în momentul inițial bara mobilă, perfect conductoare, se află la capătul dinspre rezistor al barelor fixe. Să se stabilească momentul în care puterea dezvoltată în barele fixe este maximă.

Scanned with OKEN Scanner

4.6.3. Ce tensiune electromotoare și ce sens trebuie să aibă o sursă de curent continuu, care, montată în serie cu rezistorul R din problema 4.6.1, face ca bara mobilă să se miște uniform de-a lungul barelor fixe în virtutea inerției, fără a fi nevoie să se acționeze din afară cu o forță de tracțiune?

4.6.4. O bară perfect conductoare de lungime $l = 10$ cm și masă $m = 100$ g alunecă fără frecare de-a lungul a două bare perfect conductoare plasate vertical și legate prin intermediul unui rezistor de rezistență $R = 0{,}1\ \Omega$, ca în figură. Perpendicular pe planul barelor acționează un cîmp magnetic uniform de inducție $B = 1$ T. Se cere viteza limită pe care o atinge bara mobilă, dacă este lăsată să cadă sub efectul greutății ei de-a lungul celor două bare verticale. Se ia $g = 9{,}8$ m/s^2.

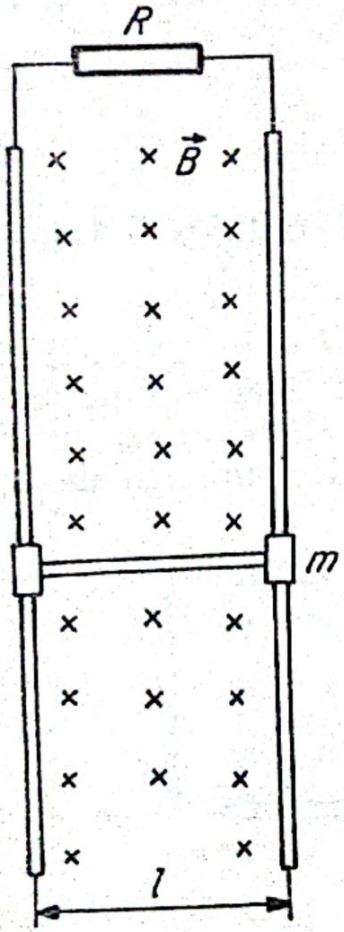


Fig. 4.6.4.

4.6.5.* (R) Să se stabilească legea de variație în timp a vitezei barei mobile din problema precedentă, dacă la momentul $t = 0$ este lăsată să cadă de-a lungul barelor verticale.

4.6.6.* (R) Să se rezolve problema 4.6.5, dacă în locul rezistorului R cele două bare verticale sînt legate printr-un condensator de capacitate $C = 100\ \mu$F, iar masa barei mobile este de numai 0,01 g.

4.6.7.* (R) O bară orizontală perfect conductoare, de lungime $l = 20$ cm și masă $m = 70$ g, poate aluneca fără frecare pe un sistem de două bare perfect conductoare verticale, între care este legat un rezistor de rezistență $R = 0{,}5\ \Omega$, ca în figură. Bara este lăsată să cadă liber de-a lungul celor două bare verticale pe o distanță $h_1 = 40$ cm, apoi pătrunde în întrefierul unui electromagnet care produce un cîmp magnetic uniform, perpendicular pe planul barelor. După o distanță h_2 iese din întrefierul electromagnetului și își continuă alunecarea liberă de-a lungul barelor verticale pe o distanță h_3, ciocnindu-se în final de un opritor. Se cere să se calculeze: a) inducția magnetică B a cîmpului produs de electromagnet, dacă mișcarea barei în întrefierul acestuia este uniformă; b) distanțele h_2 și h_3, știind că timpul total de cădere al barei verticale, din momentul eliberării ei și pînă la ciocnirea opritorului este $t_c = 0{,}5$ s,

Scanned with OKEN Scanner

viteza sa în acest moment fiind $v_c = 4{,}2$ m/s; c) cantitatea totală de căldură Q dezvoltată în rezistorul R în timpul căderii barei; d) valoarea şi sensul tensiunii electromotoare a unei surse, avînd rezistenţa internă $r = 0{,}5\ \Omega$, care, introdusă în serie cu rezistorul R, ar face ca bara să se mişte uniform în întrefierul electromagnetului după o cădere liberă de la înălţimea $h_1' = 10$ cm. Se va lua acceleraţia gravitaţiei $g = 9{,}8$ m/s². Se neglijează inductanţa proprie a sistemului de bare.

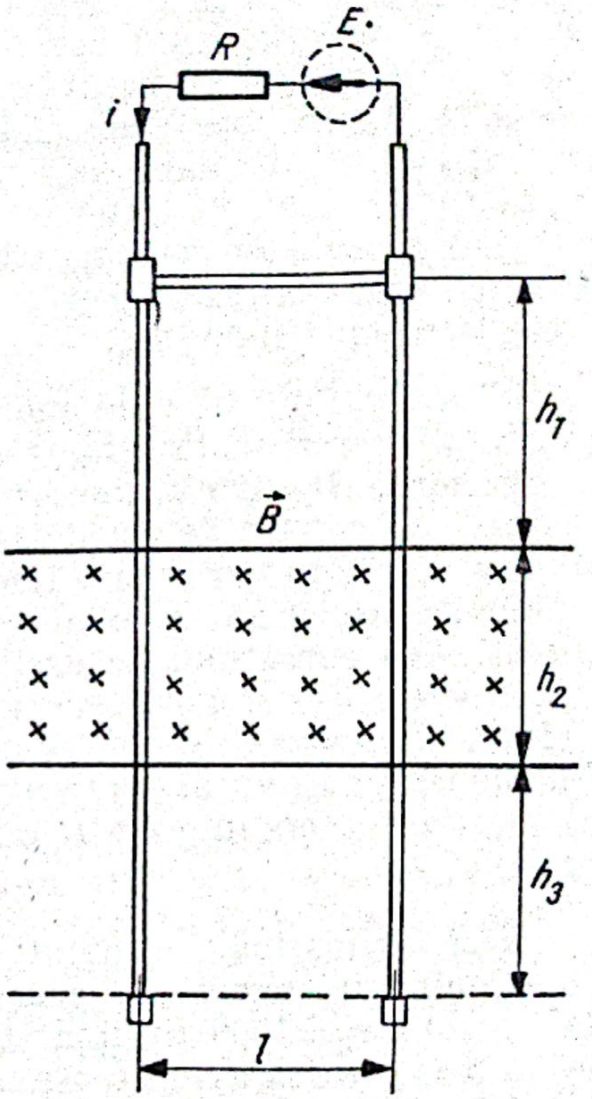


Fig. 4.6.7.

4.6.8.* O bară perfect conductoare de masă $m = 20$ g alunecă fără frecare de-a lungul a două bare perfect conductoare paralele, situate la distanţa $l = 0{,}1$ m una de alta şi al căror plan face un unghi $\alpha = 30°$ cu planul orizontal. Sistemul este plasat într-un cîmp magnetic omogen de inducţie $B = 0{,}5$ T, orientat orizontal, perpendicular pe direcţia barei mobile. Barele fixe sînt legate printr-un rezistor de rezistenţă $R = 0{,}1\ \Omega$. Se cere viteza limită pe care o poate atinge bara mobilă. Se ia acceleraţia gravitaţiei $g = 9{,}8$ m/s².

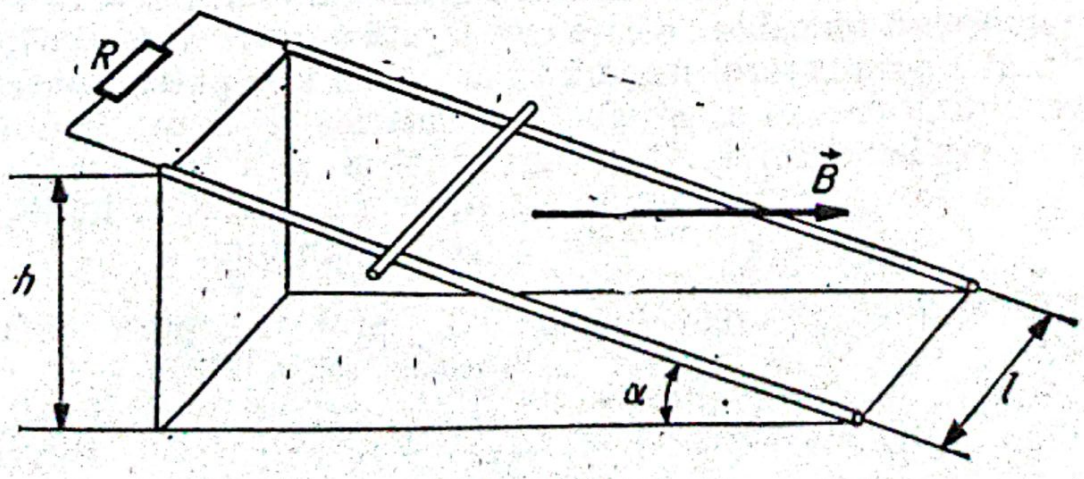


Fig. 4.6.8.

Scanned with OKEN Scanner

4.7. MAŞINI ELECTRICE

4.7.1. (R) Rotorul unui motor de curent continuu cu cîmpul statoric produs de un magnet permanent este alimentat de la o sursă de rezistenţă interioară neglijabilă, avînd tensiunea la borne reglabilă. La creşterea tensiunii sursei cu $\Delta U = 1$ V, curentul prin rotorul motorului rămîne constant, iar turaţia motorului creşte cu $\Delta n = 100$ rot/min. Se cere turaţia n_0 a rotorului cînd motorul funcţionează în gol, iar tensiunea la bornele sursei de alimentare este $U = 9$ V. Se neglijează pierderile în fier şi prin frecări, precum şi efectele reacţiei indusului.

4.7.2. (R) Rotorul unui motor de curent continuu cu excitaţie separată are rezistenţa înfăşurării $R = 2\ \Omega$. Alimentat de la o reţea cu tensiunea $U = 120$ V, motorul are în gol turaţia $n_0 = 1\,500$ rot/min pentru un curent de excitaţie cu intensitatea $I_e = 1$ A. Neglijînd pierderile în fier şi prin frecare, precum şi efectele reacţiei indusului şi considerînd aproximativ fluxul de excitaţie proporţional cu intensitatea curentului de excitaţie, se cere să se reprezinte grafic următoarele caracteristici ale motorului: a) puterea mecanică dezvoltată de motor în funcţie de turaţia rotorului (pentru $I_e = 1$ A); b) momentul la ax al motorului în funcţie de turaţie ($I_e = 1$ A); c) turaţia la mers în gol a motorului în funcţie de curentul de excitaţie.

4.7.3. O maşină de curent continuu cu excitaţie independentă, funcţionînd în regim de generator, produce o t.e.m. $E_1 = 120$ V la o turaţie $n_1 = 1500$ rot/min. În regim de motor, maşina este conectată la o sursă avînd tensiunea la borne $U = 200$ V şi rezistenţa internă neglijabilă, curentul din înfăşurarea de excitaţie rămînînd neschimbat. Se cer: a) turaţia n_0 la mersul în gol; b) turaţia n cu care motorul poate roti un tambur cu circumferinţa $l = 10$ cm pe care se înfăşoară un cablu de care este legată o greutate $G = 5760$ N; c) curentul I prin rotorul maşinii în acest caz; d) puterea mecanică P_m dezvoltată de motor şi puterea electrică P_e absorbită de la sursă; e) randamentul η. Rezistenţa înfăşurării rotorice este $R = 0{,}2\ \Omega$. Se neglijează pierderile în fier, prin frecări şi în înfăşurarea de excitaţie, precum şi efectele reacţiei indusului.

4.7.4. Maşina de curent continuu din problema precedentă este utilizată în regim de frînă, pentru coborîrea uniformă cu viteza $v' = 0{,}2$ m/s a unei greutăţi $G' = 600$ N legată de cablul înfăşurat pe tamburul fixat pe axul motorului. Se cer: a) tensiunea U' la bornele sursei care alimentează rotorul maşinii în acest caz; b) cu-

Scanned with OKEN Scanner

rentul I' prin înfășurarea rotorică; c) puterea mecanică P'_m și puterea electrică P'_e primite de mașină și puterea P'_{Cu} pierdută în înfășurarea rotorică prin efect Joule; d) tensiunea U'' la bornele unei surse care, alimentînd rotorul mașinii, ar determina ridicarea greutății G' cu viteza v'. Se lucrează cu ipotezele simplificatoare precizate în problema precedentă.

4.7.5. Rotorul unui motor de curent continuu cu excitația separată, alimentat de la o rețea de tensiune $U = 120$ V, este parcurs de un curent avînd intensitatea $I_1 = 5$ A la o turație $n_1 = 1000$ rot/min și intensitatea $I_2 = 20$ A la o turație $n_2 = 800$ rot/min. Se cer: a) rezistența R a înfășurării rotorice; b) turația n_M la care puterea mecanică dezvoltată de motor este maximă; c) valoarea puterii mecanice maxime P_{mM} a motorului; d) randamentul η_M al motorului în regimul de putere mecanică maximă; e) randamentul η al motorului cînd dezvoltă o putere mecanică de zece ori mai mică decît cea maximă. Se neglijează pierderile în fier prin frecare, precum și efectele reacției indusului și se consideră constant curentul de excitație.

4.7.6. Tensiunea electromotoare indusă în rotorul unei mașini de curent continuu în regim de generator are valoarea $E_1 = 180$ V pentru o turație $n_1 = 900$ rot/min și un curent de excitație cu intensitatea $I_{e_1} = 0{,}5$ A. Ce intensitate I_{e_2} trebuie să aibă curentul de excitație pentru ca, în regim de motor, turația rotorului să fie $n_2 = 600$ rot/min la mersul în gol, cînd mașina este legată la o rețea de curent continuu cu tensiunea $U = 240$ V. Se neglijează pierderile în fier și prin frecări, precum și efectele reacției indusului și se consideră fluxul de excitație proporțional cu intensitatea curentului de excitație.

4.7.7. Un generator de curent continuu cu excitație separată are la turația nominală tensiunea de mers în gol $U_0 = 120$ V. Rezistența înfășurării rotorice este $R = 0{,}1\ \Omega$. Sarcina generatorului este reprezentată de 120 becuri identice cu tensiunea nominală $U_b = 120$ V și puterea nominală $P_b = 100$ W. Cu cît trebuie crescută procentual turația generatorului pentru ca becurile să funcționeze în regimul nominal, excitația rămînînd constantă?

4.7.8.* (R) O mașină de curent continuu are rezistența înfășurării rotorului $R = 5\ \Omega$ și rezistența înfășurării de excitație $R_e = 100\ \Omega$. Să se compare randamentele mașinii funcționînd în regim de motor la putere mecanică maximă, pentru o conexiune paralel și, respectiv, pentru o conexiune serie. Tensiunea de alimentare este aceeași în ambele cazuri.

Scanned with OKEN Scanner

4.7.9. Un motor de curent continuu cu excitaţie derivaţie este conectat în montajul reprezentat în figură. Cum trebuie reglate reostatele din circuitul de excitaţie (R_e) şi din circuitul rotoric (R_r) înainte de închiderea întrerupătorului K, pentru a se asigura pornirea corectă a motorului?

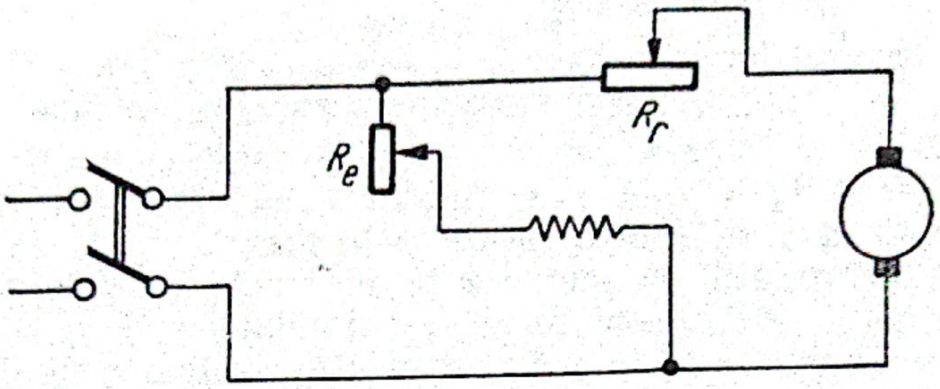


Fig. 4.7.9.

4.7.10. (R) Un motor de curent continuu cu excitaţia derivaţie are randamentul $\eta = 90\,\%$. Rezistenţa înfăşurării rotorice este $R = 0{,}1\ \Omega$. Ce rezistenţă trebuie să aibă reostatul de pornire al motorului pentru ca intensitatea I_p a curentului de pornire să fie numai de două ori mai mare decît intensitatea I a curentului în regim stabilit? Se neglijează pierderile în fier, prin frecări şi în înfăşurarea de excitaţie şi se consideră constante tensiunea la borne şi curentul de excitaţie.

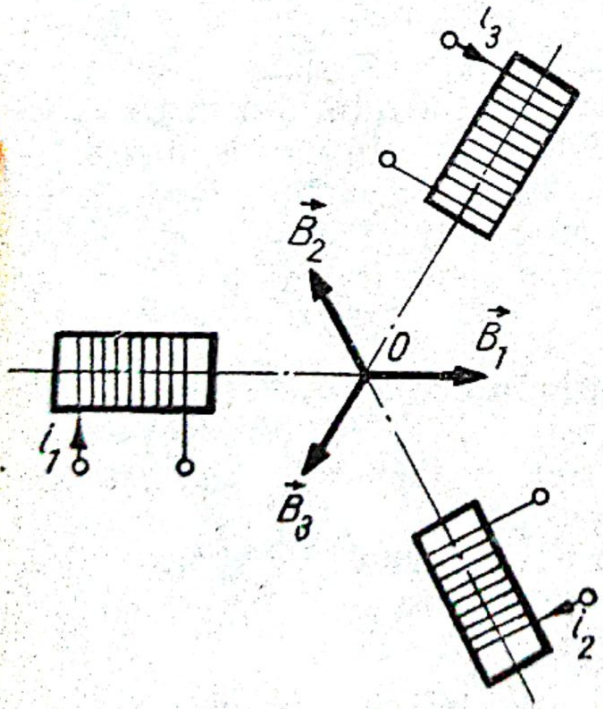


Fig. 4.7.11.

4.7.11. (R) Se consideră sistemul de trei bobine identice din figură, a căror axe formează unghiuri de cîte $\frac{2\pi}{3}$ radiani. Fiecare dintre bobine produce în punctul O un cîmp magnetic avînd inducţia $B_0 = 5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}$, orientat paralel cu axul ei, cînd este parcursă de un curent continuu de intensitate $I_0 = 10\ \mathrm{A}$. Să se calculeze inducţia magnetică în O cînd cele trei bobine sînt parcurse de un sistem trifazat de curenţi, avînd intensităţile: $i_1 = I\sqrt{2}\ \sin \omega t$, $i_2 = I\sqrt{2}\ \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$ şi

Scanned with OKEN Scanner

$i_3 = I\sqrt{2}\,\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$, valorile efective fiind $I = 10$ A, iar pulsația $\omega = 100\,\pi$ rad/s.

4.7.12. Se dorește să se obțină cîmpul magnetic învîrtitor produs în punctul O, de cele trei bobine din problema precedentă cînd sînt parcurse de sistemul trifazat de curenți dat, utilizînd numai una dintre bobine, parcursă de un curent continuu și rotită uniform în jurul punctului O, astfel încît să ocupe succesiv pozițiile celor trei bobine. Să se stabilească intensitatea I' a curentului ce trebuie să străbată înfășurarea acestei bobine și viteza unghiulară Ω cu care trebuie rotită.

4.7.13. (R) Se consideră cele trei bobine identice din figura 4.7.11 atașate unui disc care se rotește cu viteza unghiulară $\Omega = 100$ rad/s în jurul unui ax ce trece prin O; întreg sistemul fiind plasat într-un cîmp magnetic omogen. Fluxul magnetic maxim prin fiecare bobină are valoarea $\Phi = 2 \cdot 10^{-2}$ Wb. Se cer legile de variație în funcție de timp ale tensiunilor electromotoare induse în cele trei bobine, considerînd originea timpului într-unul din momentele în care fluxul primei bobine este maxim.

4.7.14. Un motor asincron are pe stator o înfășurare trifazată cu $p=2$ perechi de poli, alimentată de la o rețea cu frecvența $\nu=50$ Hz. Se cer: a) turația n_0 a cîmpului învîrtitor, b) turația n a rotorului, dacă alunecarea este $s = 2\,\%$.

Scanned with OKEN Scanner

5. CIRCUITE ÎN REGIM SINUSOIDAL

BREVIAR

Mărimi sinusoidale și operații cu mărimi sinusoidale

O mărime sinusoidală este

$$v = V_m \sin(\omega t + \gamma), \tag{1}$$

cu: $V_m > 0$ — valoarea maximă (amplitudinea); $\omega > 0$ — pulsația; t — timpul; γ — faza inițială; v — valoarea instantanee.

Defazajul mărimii sinusoidale $v_2 = V_{m2} \sin(\omega t + \gamma_2)$ în urma mărimii sinusoidale de aceeași pulsație $v_1 = V_{m1} \sin(\omega t + \gamma_1)$

$$\gamma_{12} = \gamma_1 - \gamma_2, \tag{2}$$

este o mărime algebrică.

Perioada T — cel mai mic timp pozitiv după care se repetă valorile unei funcții de timp — este legată de pulsația mărimii sinusoidale prin relația

$$\omega T = 2\pi. \tag{3}$$

Frecvența: $f = \dfrac{1}{T}$. (4)

Relația dintre pulsație și frecvență

$$\omega = 2\pi f. \tag{5}$$

Valoarea efectivă a unei mărimi periodice v, de perioada T

$$V = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2 \mathrm{d}t}\,. \tag{6}$$

Valoarea efectivă a unei mărimi sinusoidale

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \tag{7}$$

Reprezentarea vectorială a unei mărimi sinusoidale $v = V_m \sin(\omega t + \gamma)$ este redată în fig. 1, a.

Suma a două mărimi sinusoidale cu o aceeași pulsație ω este o mărime sinusoidală de aceeași pulsație reprezentată de vectorul sumă a vectorilor (fazorilor) ce reprezintă cele două mărimi sinusoidale (fig. 1, b).

Derivata v_d, *în raport cu* t, *a unei mărimi sinusoidale* $v = V_m \sin(\omega t + \gamma)$ este o mărime sinusoidală cu aceeași pulsație, amplitudinea de ω ori mai mare și faza cu $\frac{\pi}{2}$ mai mare

$$v_d = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \omega V_m \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right). \tag{8}$$

Vectorul care reprezintă derivata unei mărimi sinusoidale este rotit în sens pozitiv (antiorar) cu $\frac{\pi}{2}$ (fig. 1, c).

Circuitul dipolar (cu două borne) în regim sinusoidal (fig. 2, a) are un defazaj al curentului în urma tensiunii

$$\varphi = \gamma_u - \gamma_i \quad \text{(mărime algebrică)}. \tag{9}$$

Relațiile de definiție ale mărimilor caracteristice ale circuitului dipolar pasiv (fără surse) sînt date în tabelul de la pagina 114.

Scanned with OKEN Scanner

I. Mărimi bazate pe descompunerea tensiunii în două componente (fig. 2, b):

— *componenta activă a tensiunii*

$$U_a = U \cos \varphi ; \tag{10'}$$

— *componenta reactivă a tensiunii* (mărime algebrică, pozitivă pentru $\varphi > 0$ și negativă pentru $\varphi < 0$)

$$U_r = U \sin \varphi ; \tag{11'}$$

— *relații între componentele tensiunii*

$$U^2 = U_a^2 + U_r^2, \tag{12'}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_r}{U_a} ; \tag{13'}$$

— *rezistența* (R), *reactanța* (X) și *impedanța* (Z)

$$R = \frac{U_a}{I}, \quad X = \frac{U_r}{I}, \quad Z = \frac{U}{I}. \tag{14'}$$

II. Mărimi bazate pe descompunerea curentului în două componente (fig. 2, c):

— *componenta activă a curentului*

$$I_a = I \cos \varphi ; \tag{10''}$$

— *componenta reactivă a curentului* (mărime algebrică)

$$I_r = I \sin \varphi ; \tag{11''}$$

— *relații între componentele curentului*

$$I^2 = I_a^2 + I_r^2, \tag{12''}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_r}{I_a} ; \tag{13''}$$

— *conductanța* (G), *susceptanța* (B) și *admitanța* (Y)

$$G = \frac{I_a}{U}, \quad B = \frac{I_r}{U}, \quad Y = \frac{I}{U}. \tag{14''}$$

Relații între mărimile caracteristice

$$R = Z \cos \varphi, \quad X = Z \sin \varphi \tag{15'}$$

$$G = Y \cos \varphi, \quad B = Y \sin \varphi \tag{15''}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} ; \tag{16'}$$

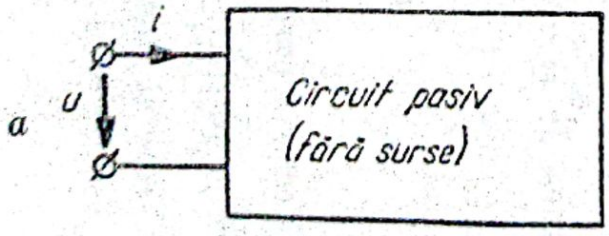
$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{G}, \tag{16''}$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2} \tag{17'}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2} ; \tag{17''}$$

$$Z = \frac{1}{Y}, \tag{18'}$$

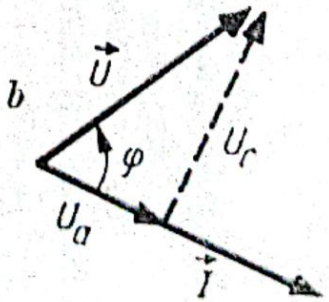
$$Y = \frac{1}{Z} \tag{18''}$$

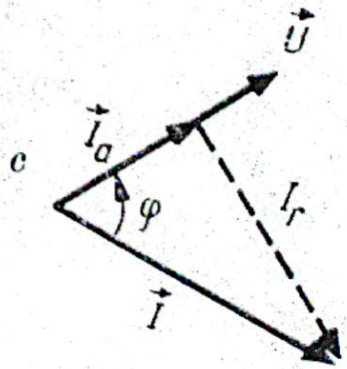


$u = \sqrt{2}\, U \sin(\omega t + \vartheta_u)$

$i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \vartheta_i)$

Fig. 2





Scanned with OKEN Scanner

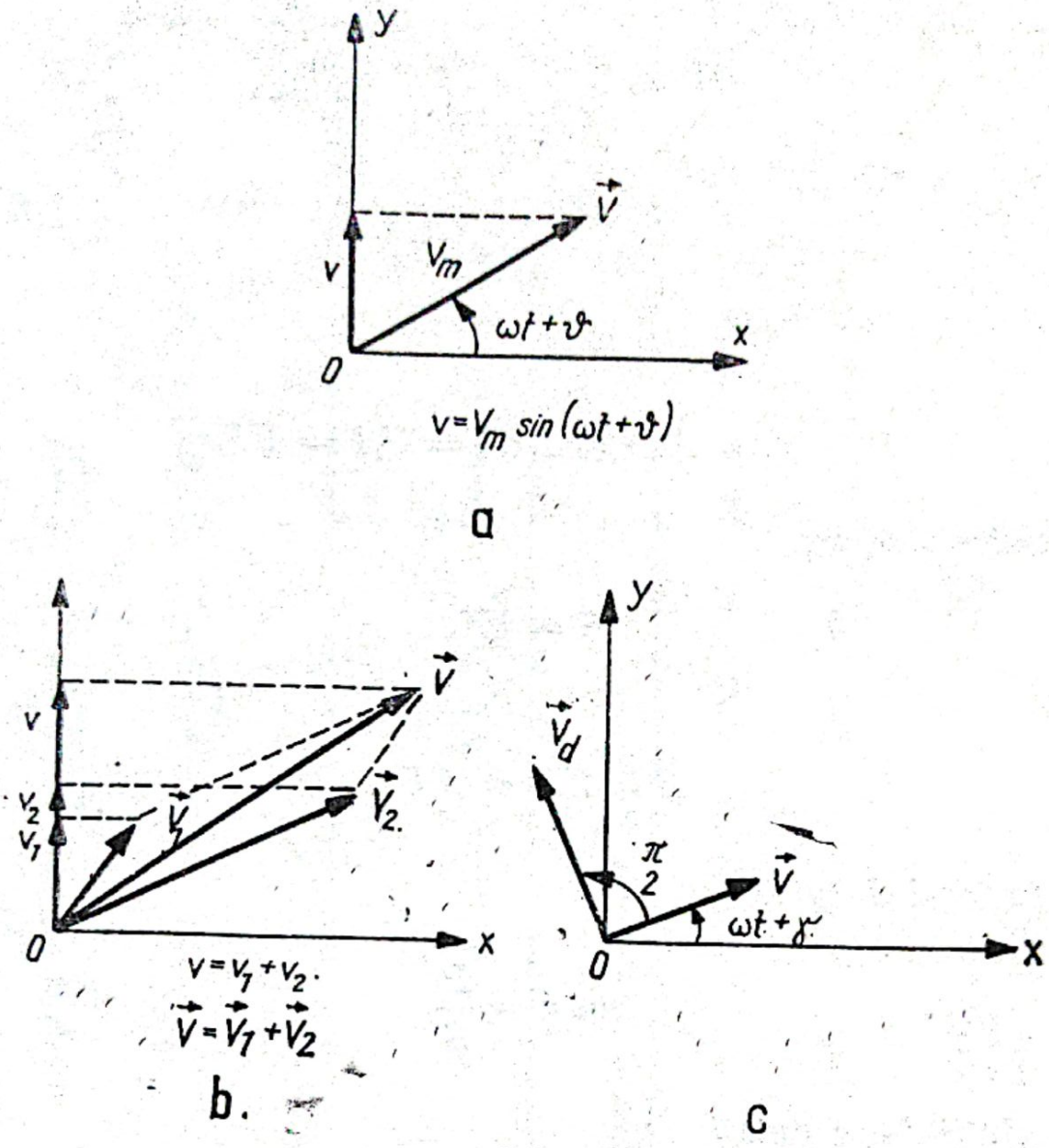


Fig. 1.

III. Puteri

— *puterea instantanee*

$$p = ui\,; \tag{19}$$

— *puterea activă* este media puterii instantanee p pe o perioadă T

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t\,; \tag{20}$$

— *puterea activă (primită de un circuit dipolar) în regim sinusoidal*

$$P = UI\cos\varphi, \tag{21}$$

Scanned with OKEN Scanner

I. Circuitul cu elemente legate în serie (fig. 3, a)

$$u = u_1 + u_2, \tag{29'}$$

$$U_a = U_{a1} + U_{a2}, \tag{30'}$$

$$U_r = U_{r1} + U_{r2}, \tag{31'}$$

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_r^2}, \tag{32'}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_r}{U_a}. \tag{33'}$$

Rezistenţa şi reactanţa echivalentă a circuitului serie

$$R = R_1 + R_2, \tag{34'}$$

$$X = X_1 + X_2. \tag{35'}$$

Impedanţa şi defazajul circuitului serie

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \tag{36'}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{X}{R}. \tag{37'}$$

Calculul circuitului serie se face folosind relaţiile (34'), (35'), (36'), (37'), apoi calculînd curentul circuitului pe baza relaţiei

$$I = \frac{U}{Z} \text{ etc.} \tag{38'}$$

II. Circuitul de elemente legate în paralel (fig. 3, b)

$$i = i_1 + i_2, \tag{29''}$$

$$I_a = I_{a1} + I_{a2}, \tag{30''}$$

$$I_r = I_{r1} + I_{r2}, \tag{31''}$$

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2}, \tag{32''}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{I_r}{I_a}. \tag{33''}$$

Conductanţa şi susceptanţa echivalente ale circuitului paralel

$$G_e = G_1 + G_2, \tag{34''}$$

$$B_e = B_1 + B_2. \tag{35''}$$

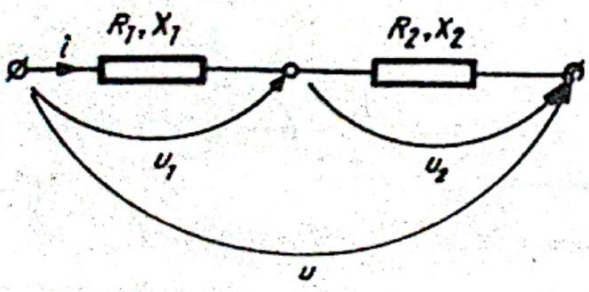
Admitanţa şi defazajul circuitului paralel

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \tag{36''}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{B}{G}. \tag{37''}$$

Calculul circuitului paralel se face folosind relaţiile (34''), (35''), (36''), (37''), apoi calculînd curentul circuitului

$$I = YU \text{ etc.} \tag{38''}$$



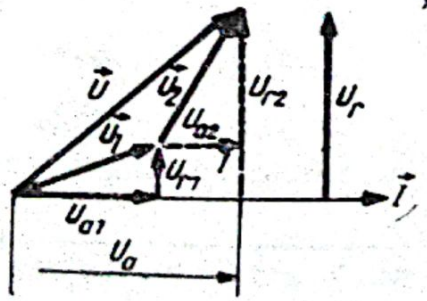
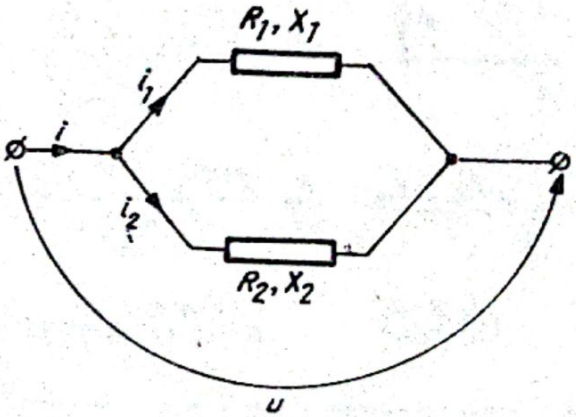
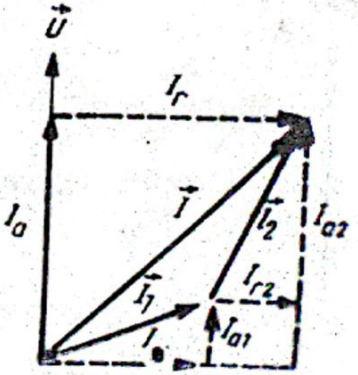


Fig. 3

a



b



III. Circuitul $R-L-C$ serie (fig. 4, a)

$$R_e = R, \quad X_e = X_L - X_C, \tag{39'}$$

Impedanța și defazajul circuitului serie

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{I}{\omega}\right)^2}, \tag{40'}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}, \tag{41'}$$

$$i = \sqrt{2}\,\frac{U}{Z}\sin(\omega t + \gamma_u - \varphi). \tag{42'}$$

IV. Circuitul $R-L-C$ paralel (fig. 4, b)

$$G_e = G, \quad B_e = B_L - B_C, \tag{39''}$$

Admitanța și defazajul circuitului paralel

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}, \tag{40''}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B_L - B_C}{G} = \frac{\dfrac{1}{\omega L} - \omega C}{\dfrac{1}{R}}. \tag{41''}$$

$$i = \sqrt{2}\;YU\sin(\omega t + \gamma_u - \varphi), \tag{42''}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fig. 4

Scanned with OKEN Scanner

V. Rezonanța de tensiune (fig. 4,a)

$$U_L = U_C, \qquad X_L = X_C, \tag{43'}$$

$$I = \frac{U}{R} = I_{max}. \tag{44'}$$

VI. Rezonanța de curent (fig. 4,b)

$$I_L = I_C, \qquad B_L = B_C, \tag{43''}$$

$$I = GU = I_{min}. \tag{44''}$$

Pulsația de rezonanță

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{45}$$

VII. Circuite serie-paralel

Metoda de calcul I. Se calculează din aproape în aproape R_e, X_e, Z_e pentru elementele legate în serie și G_e, B_e, Y_e pentru elementele legate în paralel.

Metoda de calcul II. Se construiește diagrama vectorială și se folosesc relațiile geometrice dintre elementele acestei diagrame.

Scanned with OKEN Scanner

5.1. MĂRIMI SINUSOIDALE

5.1.1. Să se determine valorile efective și frecvențele mărimilor sinusoidale: $v = 20 \sin (100 t)$; $i = \cos t$; $u = \sqrt{2} \cdot 10 \sin \left(2\pi \cdot 50\, t + \frac{\pi}{3}\right)$. Valorile mărimilor sînt date în sistemul internațional de unități (SI).

5.1.2. Să se calculeze defazajele φ_k ale mărimilor b_k în urma mărimilor a_k pentru perechile de mărimi:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \sin \left(2\pi \cdot 50\, t + \frac{\pi}{3}\right) \\ b_1 = 3 \sin \left(2\pi \cdot 50 t + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_a = \sin (10t) \\ b_2 = -\sqrt{2} \sin (10t - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 = 5 \cos \left(2\pi \cdot 50t + \frac{\pi}{3}\right) \\ b_3 = 5 \sin \left(2\pi \cdot 50t + \frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_4 = \sin (2t + 2) \\ b_4 = \sin (3t + 3). \end{cases}$$

5.1.3. Să se calculeze defazajele φ'_k ale mărimilor b_k înaintea mărimilor a_k pentru perechile de mărimi:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \sin \left(2\pi \cdot 50t + \frac{\pi}{2}\right) \\ b_1 = 3 \sin \left(2\pi \cdot 50t + \frac{3\pi}{4}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = \sin 10t \\ b_2 = \sqrt{2} \sin (10t - 1) \end{cases}$$

5.1.4. Să se exprime valoarea instantanee mărimilor sinusoidale care satisfac următoarele condiții: a) valoarea efectivă a mărimii este I, faza inițială α și frecvența f; b) valoarea efectivă a mărimii este $\sqrt{2}$, faza inițială 30° și perioada 2s; c) valoarea maximă este 10, faza inițială este nulă și pulsația este 1 rad/s; d) valoarea instan-

Scanned with OKEN Scanner

tanee a mărimii este $i_1 = \sqrt{2}\,3\,\text{A}$ la $t_1 = 0$ și $i_2 = \sqrt{2}\,4\,\text{A}$ la $t_2 = \frac{T}{4}$, iar perioada mărimii este $T = 0{,}02$ s.

5.1.5. În figură se dau graficele funcțiilor sinusoidale $i_1 = i_1(t)$ și $i_2 = i_2(t)$. Se cer: a) frecvența celor două mărimi; b) fazele lor

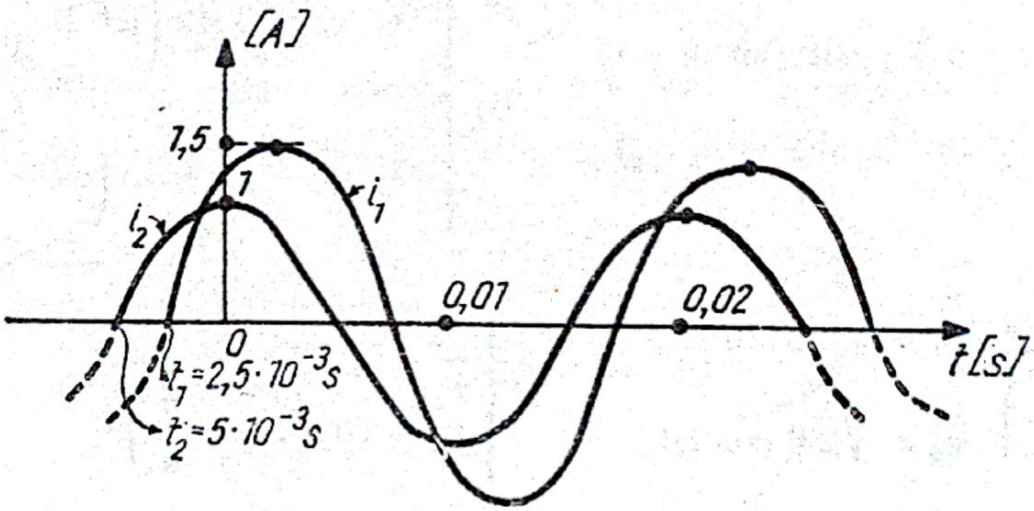


Fig. 5.1.5.

inițiale; c) valorile instantanee ale acestor mărimi ca funcții de timp; d) defazajele φ_{12}, φ_{21} ale mărimii i_2 în urma respectiv înaintea lui i_1.

5.1.6. Se cer valorile efective ale mărimilor periodice cu perioada T:

$$v_1 = \begin{cases} V, & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ -V, & t \in \left(\frac{T}{2}, T\right) \end{cases} \qquad v_2 = \begin{cases} V, & t \in \left(-\frac{T}{2}, 0\right) \\ 0, & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \end{cases}$$

$$v_3 = \frac{V}{T}t,\ t \in [0,\ T);\ v_5 = V_m |\sin \omega t| + U,$$

cu U constant,

$$v_4 = V_m \sin(\omega t + \alpha);$$

5.1.7. Se dă funcția de timp $v(t) = V_{m1} \sin(\omega t + \gamma_1) + V_{m2} \sin(2\omega t + \gamma_2)$. Se cer: a) perioada T a lui $v(t)$; b) valoarea efectivă V a lui $v(t)$.

Scanned with OKEN Scanner

5.2. ADUNAREA ȘI DERIVAREA MĂRIMILOR SINUSOIDALE

5.2.1. Să se calculeze suma perechilor de mărimi sinusoidale date mai jos, folosind reprezentarea vectorială

a) $\begin{cases} v_1 = V_{m1} \sin(\omega t + \gamma_1) \\ v_2 = V_{m2} \sin(\omega t + \gamma_2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} i_1 = \sqrt{2}\, 3 \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{6}\right) \\ i_2 = -\sqrt{2}\, 4 \sin\left(\omega t + \dfrac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2}\, 8 \sin \omega t \\ u_2 = \sqrt{2}\, 6 \cos \omega t \end{cases}$ d) $\begin{cases} v_1 = -\sin \omega t \\ v_2 = \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{6}\right). \end{cases}$

5.2.2. Se cere suma mărimilor sinusoidale

$$v_1 = \sqrt{2}\, 3 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right), \quad v_2 = \sqrt{2}\, 4 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right),$$

$v_3 = \sqrt{2}\, 5 \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Care este valoarea acestei sume la $t = \dfrac{T}{6}$?

5.2.3. Se cer intensitățile curenților i_1 din circuitele reprezentate mai jos, în care

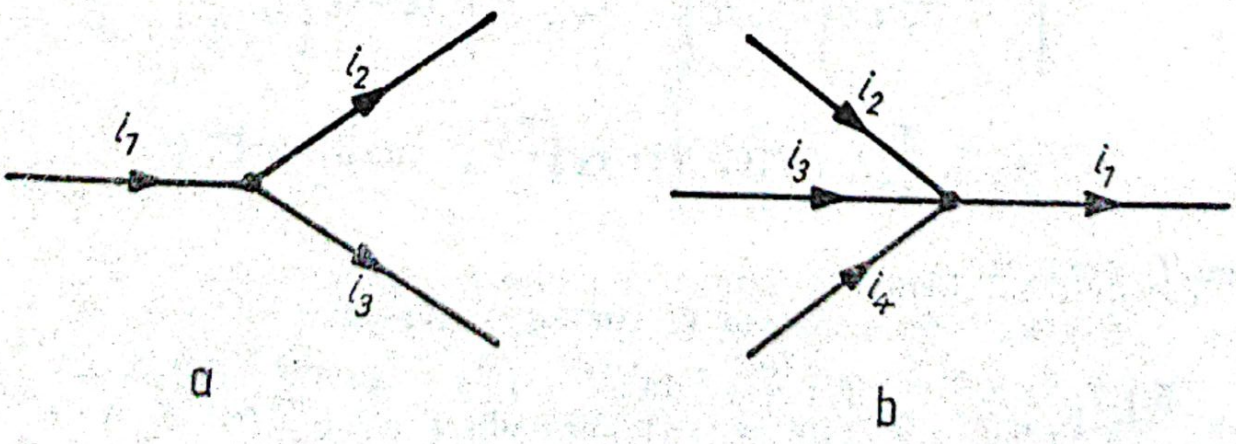


Fig. 5.2.3.

$$i_2 = \sqrt{2}\ 10\ \sin\ \omega t\ A,$$

$$i_3 = \sqrt{2}\ 10\ \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\ A,$$

$$i_4 = \sqrt{2}\ 10\ \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\ A.$$

5.2.4. Să se determine tensiunea u la bornele extreme ale circuitelor reprezentate în figură, cu $u_1 = \sqrt{2}\ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ V, $u_2 = \sqrt{2}\ \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ V, $u_3 = 2\ \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{12}\right)$ V.

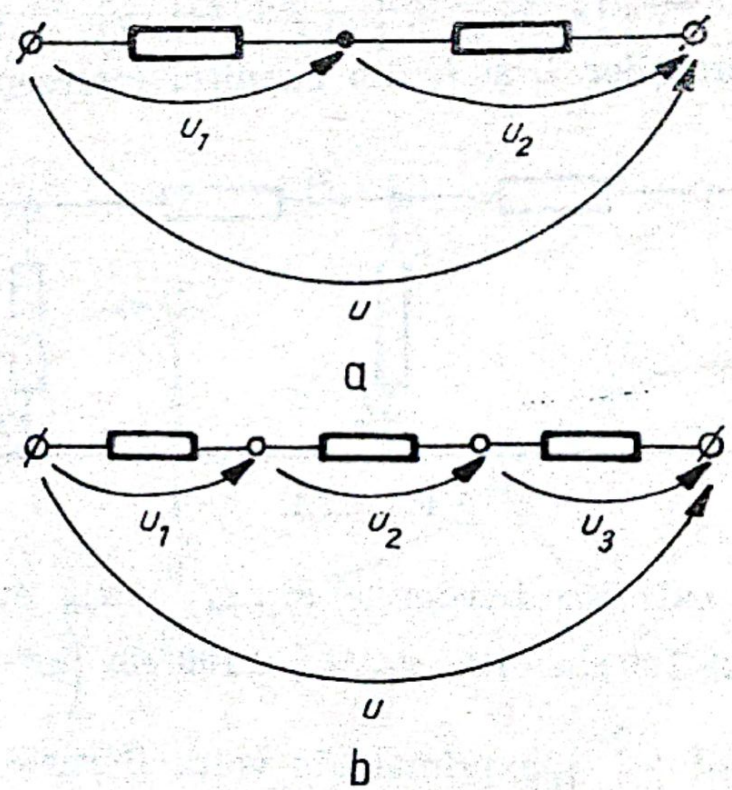


Fig. 5.2.4.

5.2.5. Să se reprezinte vectorial și să se calculeze derivatele de ordine unu, doi și trei ale mărimilor:

$v_1 = \sqrt{2}\ \sin(\sqrt{2}\ t)$, $v_2 = 3\ \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$, $v_3 = \cos 3\omega t$.

5.2.6. Să se reprezinte vectorial și să se calculeze suma $s = v + \frac{dv}{dt} + \frac{d^3v}{dt^3}$ pentru $v = \sqrt{2}\ V\ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ cu v, ω și t mărimi adimensionale.

Scanned with OKEN Scanner

5.2.7. Să se determine mărimea sinusoidală $x = X_m \sin(\omega t + \alpha)$, care satisface ecuația $2x - 3\frac{dx}{dt} - \frac{d^3x}{dt^3} = u$, cu $u = 5\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$. (Mărimile considerate sînt adimensionale).

5.3. APLICAREA TEOREMELOR LUI KIRCHHOFF ÎN REGIM SINUSOIDAL

5.3.1. Se dau valorile instantanee ale curenților $i_1 = \sqrt{2}\sin t$, $i_2 = \sqrt{2}\,2\sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$, $i_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$, în amperi. Se cer intensitățile curenților i_4 și i_5 din circuitul reprezentat în figură.

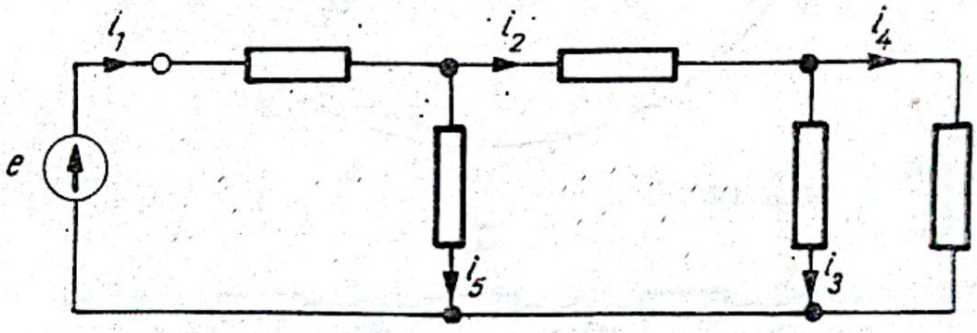


Fig. 5.3.1.

5.3.2. Să se calculeze tensiunile u_{ab}, u_{bc} și u_{ac}, cunoscînd tensiunile $u_{a0} = \sqrt{2}\,100\sin\omega t$, $u_{b0} = \sqrt{2}\,100\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$, $u_{c0} = \sqrt{2}\,100\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$, exprimate în volți. Bornele a, b, c, 0, sînt patru borne oarecare într-un circuit electric.

5.3.3. Care este valoarea tensiunilor u_1 și u_6 din circuitul reprezentat în figură la care $u_2 = \sqrt{27}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$, $u_3 = \sqrt{26}\sin\omega t$, $u_4 = \sqrt{54}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, $u_5 = \sqrt{26}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ volți.

5.3.4. Se dau tensiunile între bornele indicate în figură și se cer tensiunile u_{ad}, u_{db}, u_{fe}, u_{bf}. Se cunosc: $u_{ab} = -\sqrt{6}\sin\omega t$ V;

Scanned with OKEN Scanner

$u_{bc} = \sqrt{2}\cos\omega t\,\mathrm{V}$; $u_{cd} = \sqrt{2}\,2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\mathrm{V}$; $u_{de} = \sqrt{2}\;2\;\sin\left(\omega t - \right.$

$\left. - \frac{\pi}{6}\right)\mathrm{V}$; $u_{af} = -u_{bc}$.

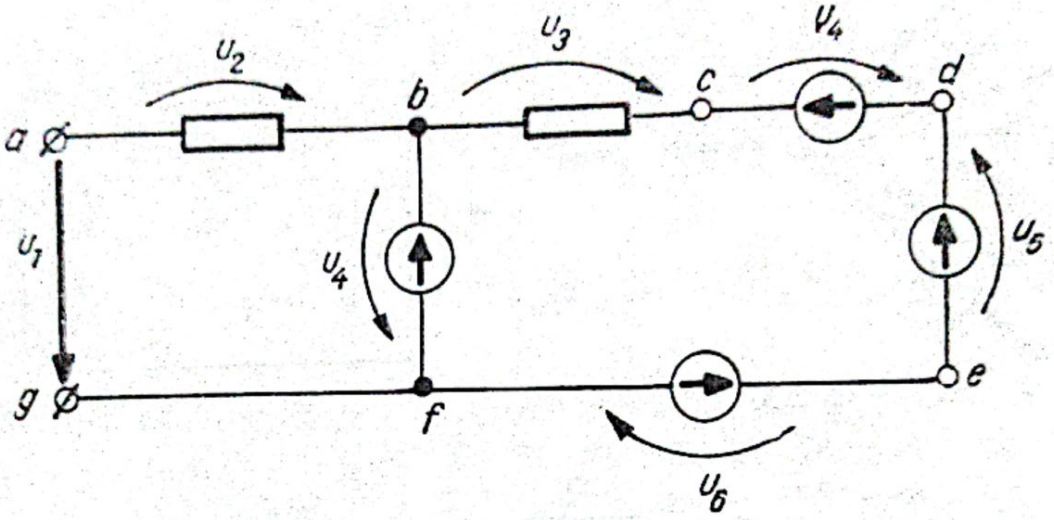


Fig. 5.3.3.

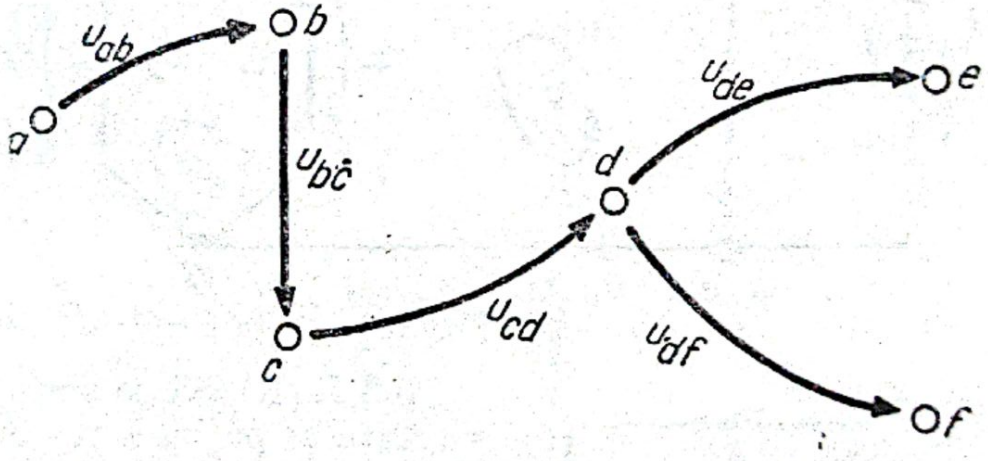


Fig. 5.3.4.

5.3.5. Într-un nod se întîlnesc $(n+1)$ conductoare. Primele n conductoare sînt parcurse de curenții sinusoidali $i_k = I_{km}\sin\left[\omega t + \right.$

$\left. + (k-1)\frac{2\pi}{n}\right]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Să se afle curentul i din ultimul conductor. Care este valoare lui i dacă $I_{1m} = I_{2m} = \ldots = I_{nm} = I_m$?

5.3.6. (R) Două surse ideale de tensiune sînt conectate ca în figură și au t.e.m. $e_1 = \sqrt{2}\,E_1\sin(\omega t + \gamma_1)$, $e_2 = -\sqrt{2}\,E_2\sin(\omega t +$

Scanned with OKEN Scanner

$+\gamma_2$). Să se afle tensiunea u de la bornele receptorului. Aplicație numerică: $E_1 = 3\text{V}$, $E_2 = 4\text{ V}$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \frac{\pi}{2}$.

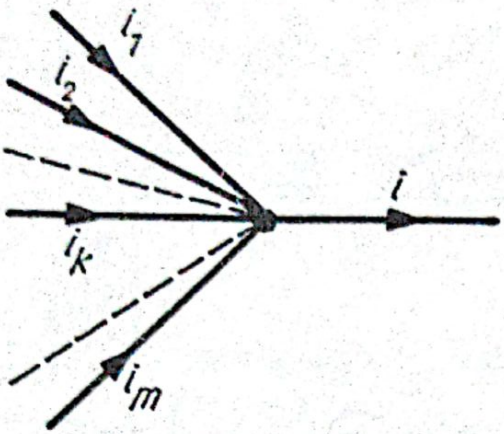


Fig. 5.3.5.

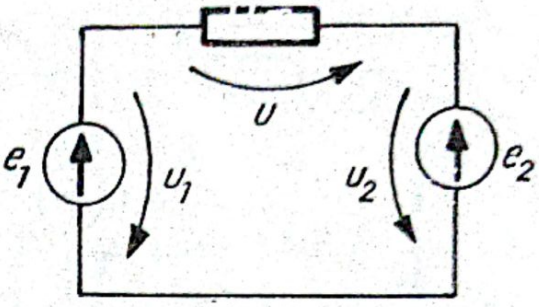


Fig. 5.3.6.

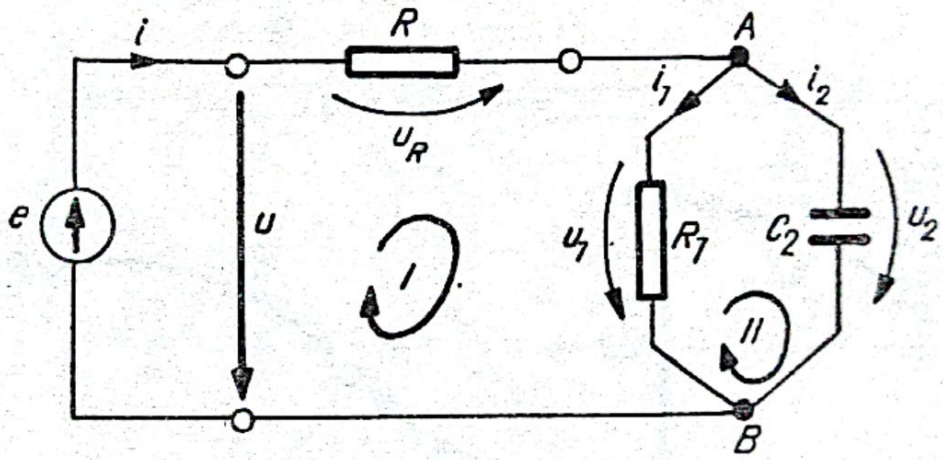


Fig. 5.3.7.

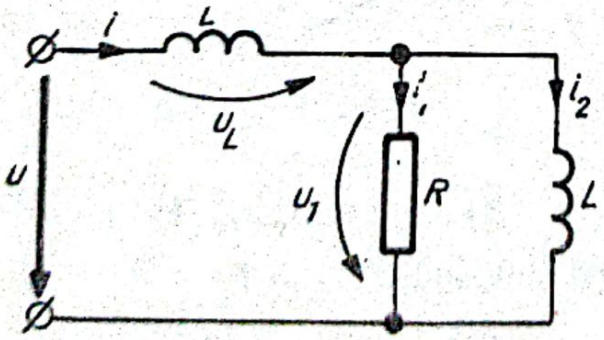


Fig. 5.3.8.

5.3.7. (R) Să se scrie ecuațiile circuitului pe baza teoremelor lui Kirchoff și să se construiască diagramele vectoriale corespunzătoare acestor ecuații.

5.3.8. (R) Să se determine tensiunea la bornele circuitului indicat în figură știind că $R = 3\Omega$, $L = \frac{4}{100\,\pi}$ H, $f = 50$ Hz și $i_1 = \sqrt{2}\,10 \sin \omega t$ A. Ce valori instantanee ar avea curenții din circuit dacă tensiunea la borne ar fi $u' = \sqrt{2}\,100 \sin \omega t$ V? Care ar fi puterea activă a circuitului în acest caz?

Scanned with OKEN Scanner

5.4. CIRCUITUL DIPOLAR

5.4.1. Un circuit dipolar, are tensiunea la borne $u = \sqrt{2}\,12 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ V și intensitatea curentului $i = \sqrt{2}\,3 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$ A. Se cer: diagrama vectorială, factorul de putere, impedanța, rezistența și reactanța circuitului în raport cu bornele sale de acces.

5.4.2. Care sînt valorile efective algebrice ale componentelor active și reactive ale tensiunii, respectiv curentului, pentru circuitul din problema precedentă?

5.4.3. Care sînt puterile active și reactive primite la borne de circuitul din problema 5.4.1.

5.4.4. Se dau circuitele dipolare pasive avînd tensiunile la borne și curenții indicați mai jos. Să se determine factorul de putere, impedanța, rezistența și reactanța, puterea activă, reactivă și aparentă. Să se construiască diagrama vectorială a curentului și tensiunii.

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2}\ 220 \sin \omega t \ \text{V} \\ i_1 = \sqrt{2}\,22 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)\text{A} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = \sqrt{2}\ 220 \cos \omega t \ \text{V} \\ i_2 = \sqrt{2}\ 22 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\text{A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_3 = \sqrt{2}\ 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right)\text{V} \\ i_3 = \sqrt{2}\ 5 \sin\left(\omega - \frac{\pi}{8}\right)\text{A} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_4 = \sin \omega t \ \text{V} \\ i_4 = -\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\text{A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_5 = -\sqrt{2}\,6 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\text{V} \\ i_5 = \sqrt{2} \cos \omega t \ \text{A}. \end{cases}$$

5.4.5. Un circuit alimentat cu tensiunea sinusoidală $u = \sqrt{2}\,100 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ V are un factor de putere inductiv $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ și o

Scanned with OKEN Scanner

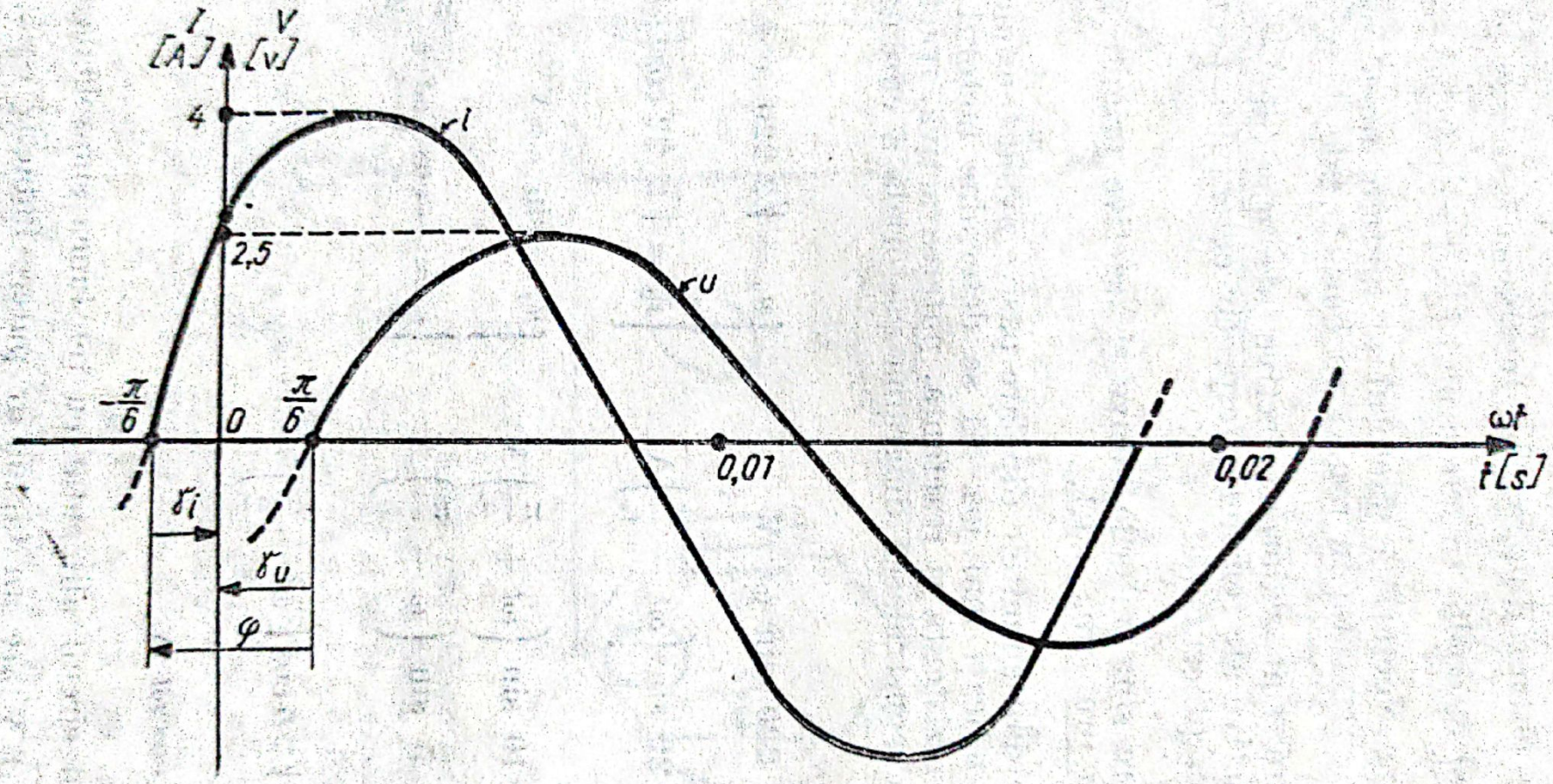

I
[A]
V
[v]
4
2,5
i
u
$-\frac{\pi}{6}$
0
$\frac{\pi}{6}$
0,01
0,02
ωt
t[s]
γ_i
γ_u
φ

Fig. 5.4.8.

impedanță $Z = 20\Omega$. Să se calculeze rezistența și reactanța circuitului, valoarea efectivă și cea instantanee a curentului, puterile activă, reactivă și aparentă la bornele circuitului.

5.4.6. Un circuit în regim sinusoidal primește o putere reactivă $Q = -4$ var, la un curent cu o valoare efectivă $I = 1\ A$. Știind că rezistența echivalentă a circuitului este $R = 3\Omega$ și că tensiunea, avînd frecvența de 50 Hz, trece prin valoarea sa maximă la $t = 2s$, se cer: a) valorile instantanee ale tensiunii și curentului; b) diagrama vectorială a tensiunii și curentului.

5.4.7. Un circuit dipolar are tensiunea la borne $u = \sqrt{2}\,110 \sin 2\pi \cdot 50\, t$ V și primește puterile $P = 88$ W, $Q = 66$ var. Să se determine: a) valorile efective și instantanee ale intensității curentului; b) impedanța, rezistența și reactanța circuitului; c) diagrama vectorială și componentele active și reactive ale curentului în valori instantanee.

5.4.8. Un circuit dipolar are tensiunea la borne și intensitatea curentului cu valorile reprezentate în diagrama din figură. Se cer: a) valorile efective și instantanee ale acestor mărimi; b) rezistența, reactanța și impedanța circuitului; c) puterile activă, reactivă și aparentă ale circuitului.

5.4.9. Să se construiască diagramele vectoriale ale componentelor active și reactive ale tensiunii și curentului pentru circuitul din problema 5.4.8. Se cer și diagramele valorilor instantanee ale acestor componente.

5.4.10. Se dă diagrama vectorială a curentului și tensiunii la bornele unui circuit dipolar. Se cer: a) rezistența, reactanța și impedanța circuitului; b) puterile activă și reactivă; c) factorul de putere.

5.4.11. Să se calculeze componenta activă și reactivă a curentului, în valori efective algebrice și în valori instantanee, conductanța, susceptanța și admitanța pentru circuitul considerat în problema 5.4.1.

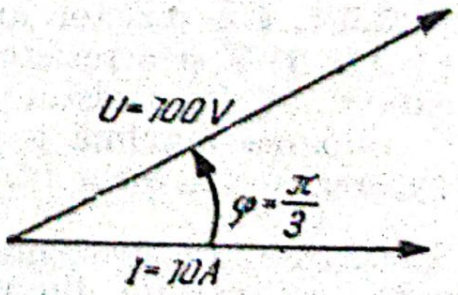


Fig. 5.4.10.

5.4.12. Se cer valorile efective algebrice și instantanee ale componentelor active și reactive ale curentului pentru circuitele considerate în problema 5.4.4. Care sînt conductanțele, susceptanțele și admitanțele acestor circuite?

Scanned with OKEN Scanner

5.4.13. Un circuit ia un curent sinusoidal $i = \sqrt{2}10 \sin\left(2\pi \cdot 50t + \frac{\pi}{3}\right)$ A, la un factor de putere $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Cunoscînd puterea reactivă luată de circuit $Q = 30$ var, se cer valorile efectivă și instantanee ale tensiunii la bornele circuitului, conductanța, susceptanța și admitanța circuitului.

5.4.14. Care sînt puterea aparentă, conductanța, susceptanța și admitanța circuitului din problema 5.4.7?

5.4.15. La un circuit dipolar pasiv se cunosc mărimile indicate în coloana *a* și se cer cele indicate în coloana *b*:

a) *mărimi cunoscute*	b) *mărimi cerute*
cazul 1: $R = 6\Omega$, $X = 8\ \Omega$	$Z, G, B, Y, \cos\varphi$
cazul 2: $G = 3\text{S}$, $B = -4\ \text{S}$	$Y, R, X, Z, \sin\varphi$
cazul 3: $R = 1\Omega$, $G = 0{,}25\ \text{S}$	$Y, Z, X, B, \operatorname{tg}\varphi$
cazul 4: $Z = 5\Omega$, $X = -3\ \Omega$	R, G, B, Y
cazul 5: $Z = 5\Omega$, $B = \frac{3}{25}\ \text{S}$	$X, R, \cos\varphi$.

5.5. ELEMENTELE DE CIRCUIT

5.5.1. Un rezistor are tensiunea la borne $u = \sqrt{2}\,220 \sin(2\pi \cdot 50t + 1)$ V și o rezistență $R = 4\Omega$. Se cer: a) valoarea efectivă a curentului din rezistor; b) valoarea instantanee a acestui curent; c) valoarea maximă a puterii instantanee primite de receptor; d) puterea activă primită.

5.5.2. Care sînt conductanța, susceptanța, impedanța și admitanța rezistorului din problema 5.5.1?

5.5.3. Un condensator alimentat cu o tensiune sinusoidală de valoare efectivă $U = 100$ V și frecvența $f = 1000$ Hz ia un curent de valoare efectivă $I = 0{,}1$ A. Să se calculeze capacitatea și reac-

Scanned with OKEN Scanner

tanța condensatorului, impedanța, puterile activă, reactivă și aparentă. Cum se modifică aceste mărimi dacă se dublează valoarea efectivă a tensiunii și valoarea frecvenței?

5.5.4. Un condensator ia o putere reactivă $Q = -4$ var fiind alimentat cu tensiunea $u = 141 \sin 2\pi \cdot 50t$V. Care sînt: valoarea maximă a intensității curentului din condensator, valoarea instantanee a acestui curent, reactanța capacitivă, susceptanța și impedanța condensatorului.

5.5.5. O bobină ideală are o inductivitate $L = 0{,}1$ H și o tensiune la borne $u = \sqrt{2}\,12 \sin 1000\,t$ V. Să se determine reactanța inductivă a bobinei, valoarea efectivă și cea instantanee a curentului bobinei, puterile activă și reactivă primite de bobină.

5.5.6. De cîte ori crește puterea reactivă a bobinei din problema precedentă dacă se mărește frecvența de trei ori și valoarea efectivă a tensiunii de 6 ori?

5.5.7. O sursă ideală de tensiune are t.e.m. $e = \sqrt{2}\,220 \sin \omega t$ V și debitează un curent $i = \sqrt{2}\ 5 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$A. Se cer puterea activă și puterea reactivă dată de sursă. Care este valoarea maximă a puterii instantanee date de sursă?

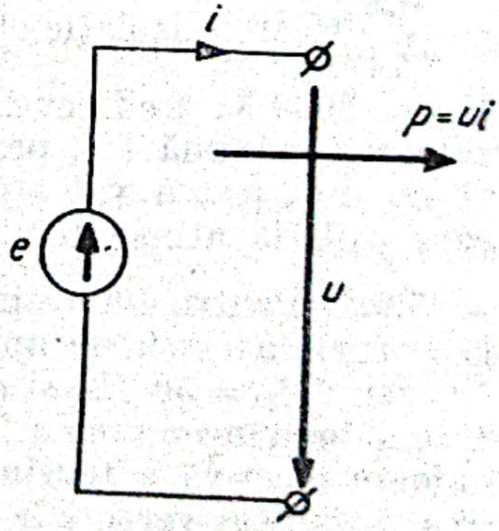


Fig. 5.5.7.

5.5.8. Ce relație există între rezistența rezistorului și capacitatea condensatorului care, alimentate la aceeași tensiune sinusoidală, iau o putere activă respectiv o putere reactivă cu aceeași valoare absolută?

5.5.9. O bobină ideală are inductivitatea $L = 1$ H și e parcursă de un curent de intensitate $i = 10 \sin 2\pi \cdot 50t$ A. Să se afle: a) reactanța bobinei; b) valoarea instantanee a tensiunii; c) puterea reactivă primită de bobină; d) valoarea maximă a energiei magnetice a bobinei.

5.5.10. Un condensator are capacitatea $C = 100$ μF. Să se afle: a) valoarea instantanee a tensiunii; b) reactanța condensatorului; c) reactanța capacitivă; d) puterea reactivă primită de condensator;

Scanned with OKEN Scanner

e) valoarea maximă a energiei cîmpului electric din condensator. Se ştie că intensitatea curentului din condensator este $i = \sqrt{2}\,100 \sin 1000t$ mA.

5.6. CIRCUITE SERIE

5.6.1. O bobină are inductivitatea $L = \frac{3}{314}$ H şi rezistenţa $R = 4\Omega$. Intensitatea curentului din bobină este $i = \sqrt{2}\,2 \sin\left(2\pi \cdot 50\,t + \frac{\pi}{5}\right)$ A. Se cer : a) căderile de tensiune rezistivă şi inductivă ; b) diagrama vectorială ; c) tensiunea la bornele circuitului ca valoare efectivă şi instantanee ; d) factorul de putere ; e) impedanţa circuitului ; f) puterea activă ; g) puterea reactivă ; h) puterea aparentă.

5.6.2. La bornele bobinei din problema precedentă se aplică o tensiune $u = \sqrt{2}\,10 \sin 2\pi \cdot 500t$ V. Să se calculeze intensitatea curentului în valoare efectivă şi instantanee şi celelalte mărimi cerute în problema precedentă.

5.6.3. O bobină cu rezistenţa $R = 6\Omega$ şi inductivitatea $L = \frac{0{,}8}{314}$ H are o izolaţie electrică care trebuie încercată la tensiunea $U_{inc} = 2000$ V. Ce frecvenţă trebuie să aibă tensiunea sinusoidală cu valoarea maximă U_{inc} pentru ca intensitatea curentului din bobină să nu depăşească valoarea efectivă admisibilă de $I = 10$ A pentru care izolaţia atinge temperatura maximă admisibilă ?

5.6.4. Pentru determinarea inductivităţii şi rezistenţei unei bobine la bornele acesteia se aplică o tensiune sinusoidală $U = 80$ V cu o frecvenţă $f_1 = 50$ Hz şi se măsoară curentul din bobină $I_1 = 12$ A. La o a doua încercare cu frecvenţa crescută la $f_2 = 100$ Hz şi aceeaşi valoare efectivă a tensiunii se măsoară curentul $I_2 = 8$ A. Se cer : a) diagramele vectoriale pentru fiecare din cele două regimuri ; b) rezistenţa şi inductivitatea bobinei ; c) puterea activă absorbită de bobină în fiecare din cele două regimuri ; d) t.e.m. maxime induse în bobină. (Se neglijează variaţia rezistenţei şi inductivităţii cu frecvenţa).

5.6.5. Alimentînd cu un curent continuu $I = 10$ A o bobină, tensiunea la bornele ei este $U = 120$ V. Aceeaşi bobină alimentată cu o tensiune sinusoidală de valoare efectivă $U_1 = U$ şi frecvenţă

Scanned with OKEN Scanner

$f_1 = 50$ Hz ia un curent cu valoarea efectivă $I_1 = 6$ A. Să se calculeze : a) rezistența și inductivitatea bobinei ; b) reactanța inductivă și impedanța bobinei la frecvențele $f_1 = 50$ Hz și $f_2 = 100$ Hz ; c) conductanța, susceptanța și admitanța aceleiași bobine la frecvențele f_1 și f_2.

5.6.6. O bobină cu rezistența R și inductivitatea L are la borne o tensiune $u = 12 \sin 500t$ V și este parcursă de curentul $i = 4 \sin \left(500t - \frac{\pi}{3}\right)$ A. Se cer : a) energia consumată de bobină în timp de 5 minute ; b) valoarea maximă a energiei magnetice din bobină ; c) rezistența ; d) inductivitatea ; e) valoarea instantanee a intensității curentului din bobină dacă frecvența se reduce la jumătate.

5.6.7. O bobină avînd tensiunea la borne $U = 220$ V ia o putere activă $P = 10$ W și o putere reactivă $Q = 8$ var. Care este cea mai mare putere activă pe care o poate lua un rezistor legat în serie cu bobina, la aceeași tensiune totală $U = 220$ V, și care este rezistența electrică a acestuia ?

5.6.8. Un circuit serie format dintr-un condensator de capacitate $C = 100$ μF și un rezistor de rezistențe $R = 15\Omega$ are la borne o tensiune $u = \sqrt{2}\, 100 \sin \left(500t + \frac{\pi}{5}\right)$ V. Se cer : a) reactanța circuitului ; b) conductanța, susceptanța și admitanța circuitului ; c) puterea activă și puterea reactivă primite de circuit ; d) valoarea instantanee a intensității curentului.

5.6.9. Tensiunea la bornele unui condensator are o valoare efectivă de $\sqrt{3}$ ori mai mare decît valoarea efectivă a tensiunii la bornele rezistorului înseriat cu el. Se știe că tensiunea la bornele circuitului serie format de aceste elemente are valoarea efectivă $U = 120$ V, iar puterea activă a circuitului este $P = 60$ W. Să se calculeze : a) valoarea efectivă a tensiunilor la bornele rezistorului și condensatorului ; b) factorul de putere al circuitului ; c) rezistența, reactanța și impedanța circuitului ; d) capacitatea condensatorului dacă frecvența este $f = \frac{1000}{2\pi}$ Hz.

5.6.10.* Ce reactanță trebuie să aibă un condensator legat în serie cu un rezistor de rezistență dată R pentru ca să ia o putere reactivă absolută maximă, atunci cînd la bornele circuitului serie format din aceste elemente se aplică o tensiune dată $u = U_m \sin \omega t$? Care este valoarea acestei puteri reactive ?

Scanned with OKEN Scanner

5.6.11. Se dă un circuit serie format dintr-un rezistor R şi un condensator C. Valoarea efectivă a tensiunii sinusoidale la bornele circuitului este constantă şi dată, U. Se ştie că dacă tensiunea la borne are frecvenţele f_1, f_2 intensitatea curentului din circuit are valorile I_1 respectiv I_2. Se cer : rezistenţa şi capacitatea elementelor.

5.6.12. O bobină de rezistenţă R şi inductivitate L este legată în serie cu un condensator C. Tensiunea sinusoidală la bornele circuitului are valoarea efectivă $U = 100$ V. Tensiunea la bornele condensatorului are o valoare maximă triplă faţă de valoarea maximă a t.e.m. de autoinducţie din bobină. Factorul de putere al circuitului este $\cos \varphi = 4/5$. Se cer : a) diagrama vectorială a tensiunilor ; b) căderile de tensiune rezistivă, inductivă şi capacitivă ; c) tensiunile la bornele bobinei şi condensatorului ; d) intensitatea curentului din circuit dacă puterea activă este $P = 160$ W ; e) rezistenţa, reactanţele inductivă şi capacitivă ; f) impedanţa circuitului.

5.6.13. (R) O bobină alimentată de la o reţea de tensiune sinusoidală cu valoarea efectivă U şi frecvenţa f ia un curent de valoare efectivă I. Legînd în serie cu bobina un condensator de capacitate C curentul din circuit îşi păstrează valoarea efectivă I. Cunoscînd $U = 60$ V, $f = 50$ Hz, $C = \dfrac{1}{\pi \cdot 4800}$ F şi $I = 2$ A, se cer : a) rezistenţa, reactanţa şi inductivitatea bobinei ; b) puterile activă şi reactivă ale circuitului cu şi fără condensator ; c) tensiunea la bornele bobinei ; d) diagramele vectoriale ale tensiunilor.

5.6.14.* Un circuit serie R, L, C are la borne o tensiune $u = \sqrt{2}\, U \sin \omega t$ V. Să se calculeze frecvenţele pentru care : a) puterea activă a circuitului este maximă ; b) puterea reactivă totală a circuitului e egală cu zero ; c) puterea reactivă are valori extreme ; d) valoarea efectivă a căderii de tensiune inductive este maximă ; e) valoarea efectivă a căderii de tensiune capacitivă este maximă. Pentru punctele a) şi b) se cer şi valorile extreme corespunzătoare.

5.6.15.* Un circuit serie este format dintr-o bobină (R, L) şi un condensator. Se ştie că la rezonanţă puterea activă a circuitului este $P = 12$ W şi valoarea efectivă a tensiunii la bornele condensatorului este $U_0 = 8$ V, dacă tensiunea la bornele circuitului are valoarea efectivă $U = 6$ V. Se cer : a) tensiunea la bornele bobinei, în valoare efectivă ; b) rezistenţa, reactanţa inductivă şi reactanţa capacitivă ; c) factorul de putere al circuitului ; d) mărimile de la a) şi c) dacă se menţine valoarea efectivă a tensiunii la borne şi se măreşte de patru ori valoarea frecvenţei.

Scanned with OKEN Scanner

5.6.16. Două bobine se leagă în serie la o rețea de curent alternativ cu tensiunea U. Se știe că prin circuitul serie astfel format trece un curent de valoare efectivă $I = 2{,}8$ A, tensiunea la bornele primei bobine este $U_1 = 56$ V la un factor de putere $\cos \varphi_1 = 0{,}65$ iar puterile primite de a doua bobină sînt $P_2 = 158$ W și $Q_2 = 118$ var. Să se calculeze: a) rezistențele, reactanțele și impedanțele celor două bobine; b) tensiunea la bornele întregului circuit; c) factorul de putere al circuitului serie; d) impedanța circuitului dacă frecvența tensiunii aplicate se dublează.

5.6.17. (R) Parametrii R_2 și X_2 ai unui circuit dipolar pot fi determinați experimental folosind circuitul reprezentat în figură, la

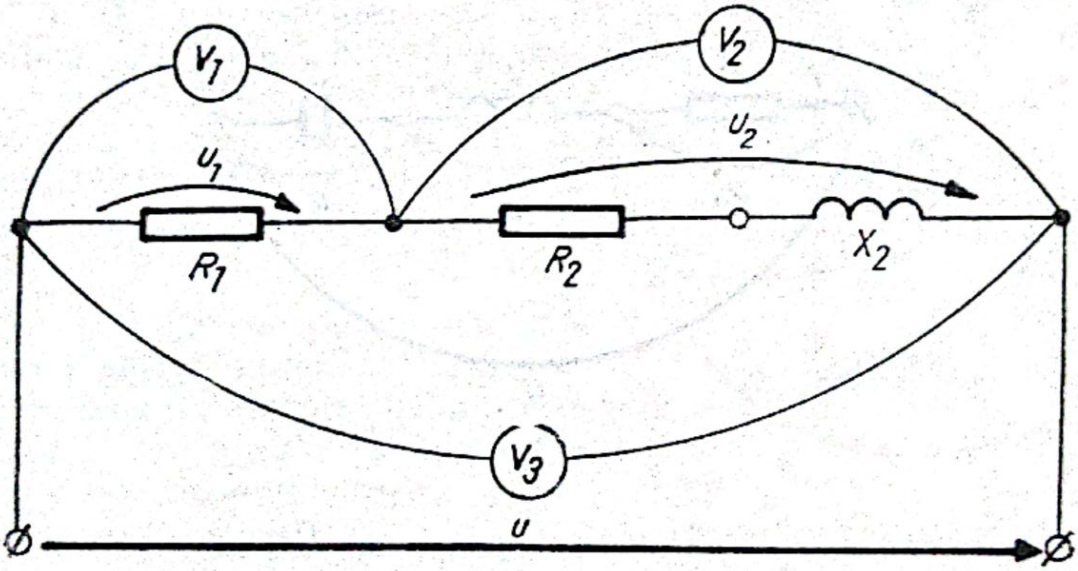


Fig. 5,6.17.

care se cunoaște rezistența R_1 a rezistorului iar voltmetrele măsoară tensiunile U_1, U_2, U. Să se calculeze R_2, X_2 dacă $R_1 = 100\Omega$, $U_1 = 60$ V, $U_2 = 80$ V, $U = 100$ V. Se neglijează curenții luați de voltmetre.

5.6.18. Circuitul serie reprezentat în figură este parcurs de un curent de intensitate $i = \sqrt{2}\ 10 \sin\left(2\pi \cdot 50t + \frac{\pi}{4}\right)$ A. Să se determine: a) tensiunile u_5, u', u'', u; b) rezistența, reactanța și impedanța circuitului; c) puterea activă, reactivă și aparentă a întregului circuit; d) diagrama vectorială a circuitului; e) factorul de putere al întregului circuit. Se dau: $R_1 = 6\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_5 = 2\Omega$, $X_{L_4} = 2\Omega$, $X_{C_2} = 8\Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

5.6.19.** La un circuit serie $R - L - C$ se folosesc notațiile indicate în figură, se dau și se cer mărimile precizate în tabelul de mai jos.

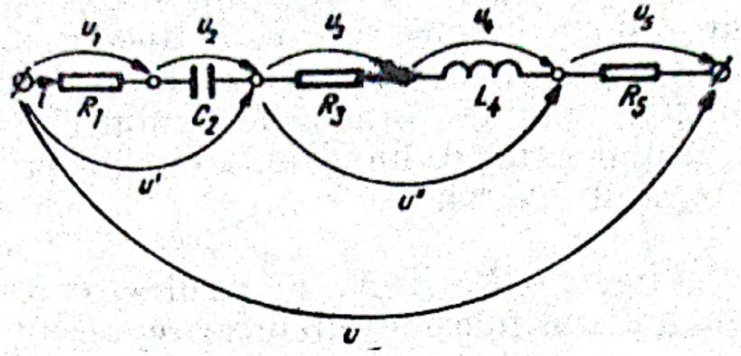


Fig. 5.6.18.

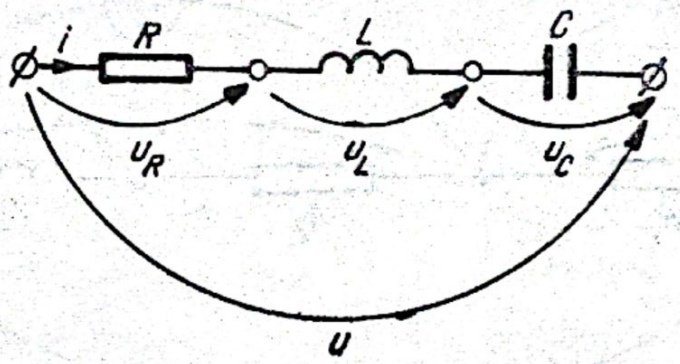


Fig. 5.6.19.

Nr.	*Date*	*Cerute*
1	$U,\ R,\ L,\ C,\ f$	$P,\ Q,\ I,\ Z,\ \cos\varphi$
2	$P,\ Q,\ R,\ U_L$	$U_C,\ I,\ S$
3	$I,\ P,\ Q,\ U_C$	$U,\ R,\ X_L,\ X_C,$
4	$R,\ Q_L,\ U_C,\ I$	$Z,\ \cos\varphi,\ U$
5	$R = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \Omega$	I
	$Q_L = 6500$ var	P
	$U_C = 50\sqrt{3}$ V	S
	$U = 100$ V	Z

Scanned with OKEN Scanner

5.6.20. (R)* Menținînd valoarea efectivă U a tensiunii aplicate la bornele circuitului reprezentat în figura 5.6.19, se modifică frecvența acestei tensiuni. La frecvența f_1 curentul are o valoare efectivă maximă $I_1 = 40$ A. La frecvențele $f_2 = 50$ Hz și $f_3 = 100$ Hz curentul are valoarea efectivă $I = 20$ A. Știind că tensiunea la bornele circuitului are valoarea efectivă $U = 200$ V, se cer: a) impedanțele circuitului și factorii de putere la cele trei frecvențe f_1, f_2, f_3; b) parametrii R, L, C ai circuitului; c) frecvența de rezonanță și valorile efective ale tensiunii la bornele bobinei cu parametrii R, L la cele trei frecvențe considerate.

5.7. CIRCUITE DERIVAȚIE

5.7.1. (R) Se consideră circuitul paralel reprezentat în figură, valorile efective ale tensiunii și curentului $U = 100$ V, I = 0,141 A, puterea activă $P = 10$ W și frecvența $= 50$ Hz. Se cer pentru acest regim sinusoidal: R, I_R, I_C, X_C, C și cos φ. Să se construiască diagrama vectorială a circuitului.

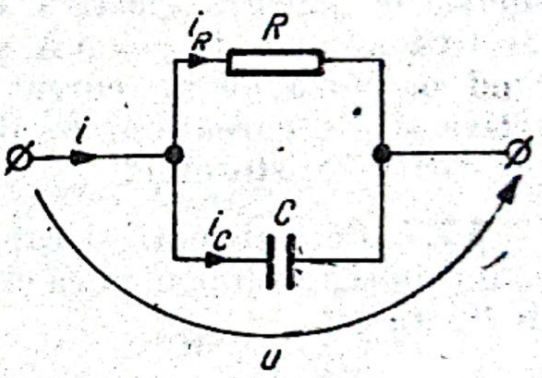


Fig. 5.7.1.

5.7.2. (R) Se cer puterea activă, puterea reactivă, curentul I și impedanța circuitului din problema precedentă dacă se dublează frecvența tensiunii sale de alimentare.

5.7.3. Un rezistor de rezistență cunoscută R este parcurs de un curent de valoare efectivă dată I_R. La bornele rezistorului este conectată în paralel o bobină ideală parcursă de un curent cu valoarea efectivă cunoscută I_L. Se cer: a) valoarea efectivă a curentului total; b) impedanța echivalentă a circuitului; c) factorul de putere al circuitului; d) puterea reactivă a circuitului.

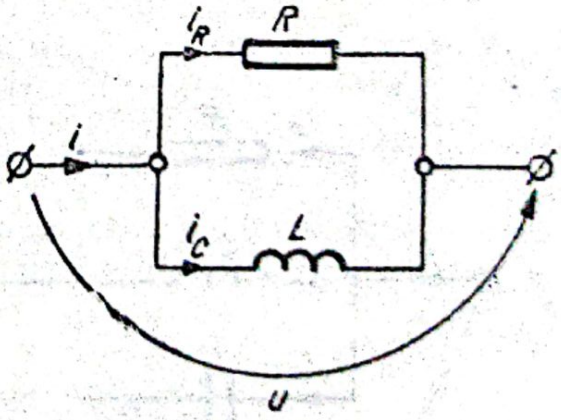


Fig. 5.7.3.

5.7.4. Circuitul din figură se află la rezonanță, la frecvența $f_0 = 500$ Hz, curentul din bobina ideală avînd valoarea efectivă $I_{L0} = 1$ A și tensiunea la bornele sale fiind $U = 100$ V. Se cer: a) L, C; b) valoarea efectivă a curentului total și puterea

Scanned with OKEN Scanner

reactivă a circuitului dacă se menține valoarea efectivă a tensiunii de alimentare dar se dublează frecvența sa.

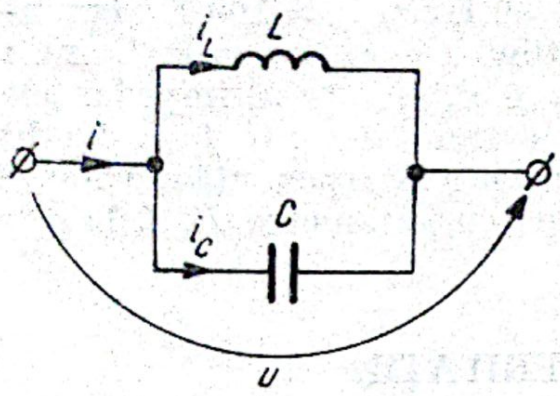


Fig. 5.7.4.

5.7.5. (R)* O linie electrică cu tensiunea $U = 220$ V și frecvența $f = 50$ Hz alimentează un receptor cu o putere activă $P = 10$ kW, la un factor de putere inductiv $\cos \varphi = 0{,}9$. Ce condensator trebuie legat la bornele receptorului, în paralel cu acesta, pentru a se forma un circuit care ia de la rețea aceeași putere la un factor de putere inductiv $\cos \varphi_c = 0{,}95$? Cum se modifică pierderile de putere pe linie prin această ameliorare a factorului de putere?

5.7.6. (R)* La frecvența f', circuitul alimentat cu o tensiune sinusoidală de valoare efectivă constantă U, ia curentul cu valoarea efectivă minimă $I_{min} = 5$ A și puterea activă $P' = 100$ W, bobina fiind parcursă de un curent $I'_L = 5$ A. Care sînt valorile puterii active și ale curentului total I la o frecvență $f = 5f'$? Care este rezistența rezistorului?

5.7.7. Ce rezistență și capacitate trebuie să aibă circuitul reprezentat în figura b pentru ca el să fie echivalent circuitului reprezentat în figura a?

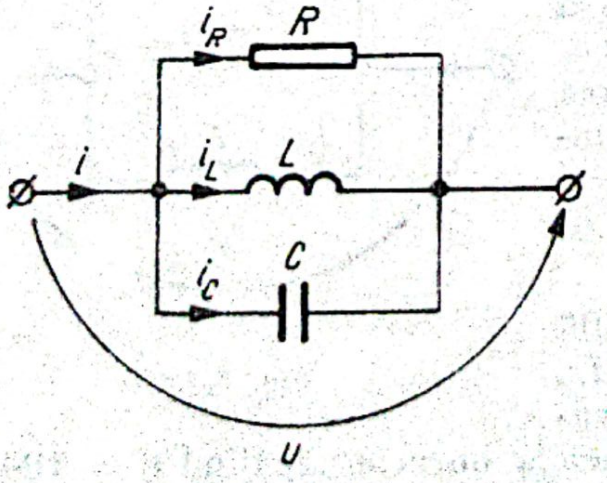


Fig. 5.7.6.

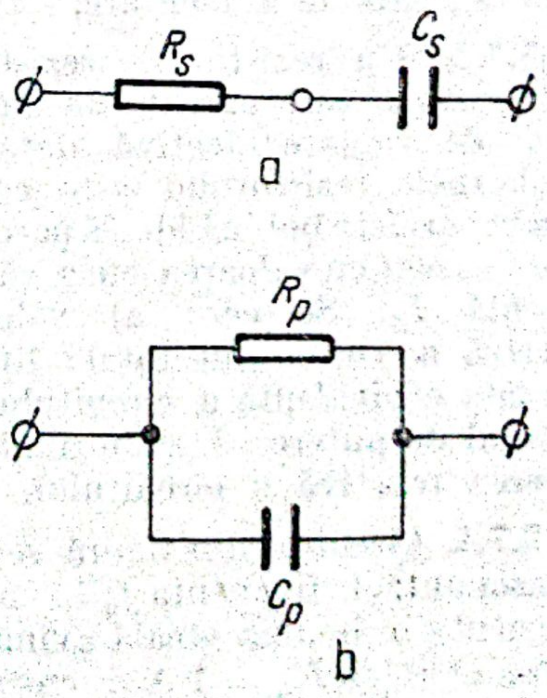
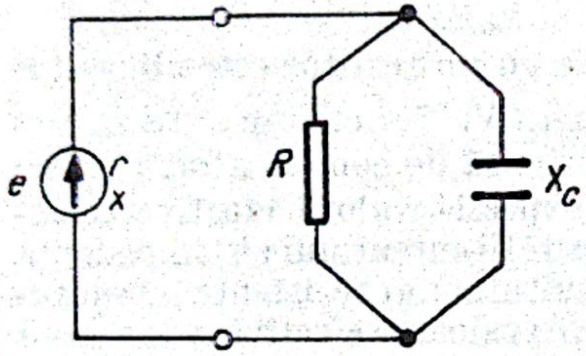


Fig. 5.7.7

5.7.8.** O sursă cu t.e.m. $e = \sqrt{2}\,E \sin(\omega t + \gamma)$ V are rezistența internă r și reactanța internă $x = \omega L$. Ce rezistență R și ce capacitate C trebuie să aibă rezistorul, respectiv condensatorul, care iau de la sursă o putere activă maximă, atunci cînd se leagă în paralel la bornele acesteia? Care este valoarea acestei puteri active maxime pe care o dă sursa?



Fig, 5.7.8.

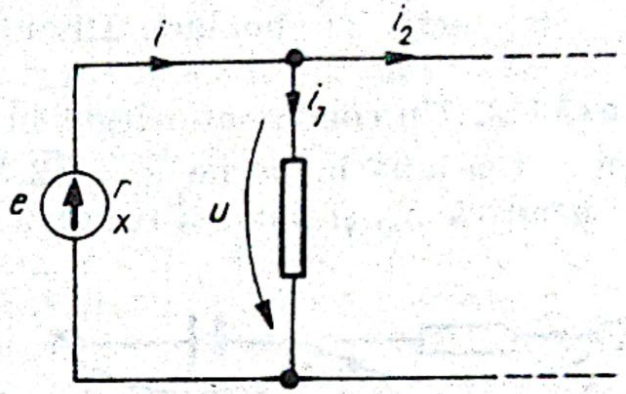


Fig. 5.7.9.

5.7.9.* O sursă cu t.e.m. $e = \sqrt{2}\,12 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ V, rezistența internă $r = 1\Omega$ și reactanța internă $x = 2\Omega$, debitează un curent $i_1 = 3\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ A într-un circuit legat la borne și un curent $i_2 = 4\sqrt{2}\sin t$ A într-un alt circuit exterior legat în paralel cu primul. Se cer: a) intensitatea curentului din sursă, ca valori efectivă și instantanee; b) tensiunea la bornele sursei, ca valori efectivă și instantanee; c) puterea activă utilă și randamentul sursei.

5.7.10.** Un curent de intensitate dată $i = 10 \sin(2\pi \cdot 500t)$ A trece printr-un circuit $R-C$ derivație. Capacitatea fiind dată $C = \frac{100}{\pi}\,\mu$F se cere să se determine rezistența R pentru care circuitul primește o putere activă maximă. Care este valoarea acestei puteri active și cît este factorul de putere al circuitului în acest caz?

5.8. PROBLEME DIVERSE

5.8.1. O bobină în regim sinusoidal are valoarea efectivă a tensiunii la borne U și ia o putere activă P la un factor de putere $\cos\varphi$. Se cer: a) rezistența, reactanța și impedanța bobinei; b) valoarea

Scanned with OKEN Scanner

efectivă a curentului din bobină; c) puterea activă a bobinei dacă s-ar dubla frecvența tensiunii de alimentare.

5.8.2.* La un circuit serie $R-L$ în regim sinusoidal se cunosc tensiunea la borne U, rezistența R și puterea reactivă primită Q. Se cer: a) valoarea efectivă a curentului; b) reactanța bobinei; c) puterea activă a bobinei. Discuție.

5.8.3. Un condensator legat în serie cu un rezistor este alimentat cu o tensiune la borne $u = \sqrt{2}\, U \sin \omega t$ V. Se cunosc: reactanța capacitivă X_C și puterea reactivă Q primită de condensator. Se cer: a) expresia valorii efective a intensității curentului; b) impedanța circuitului; c) rezistența circuitului; d) valoarea efectivă a tensiunii la bornele condensatorului și rezistorului.

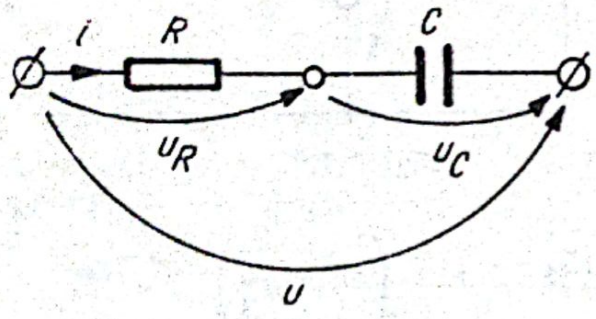


Fig. 5.8.4.

5.8.4. Se dă puterea activă P, puterea reactivă Q și valoarea efectivă I a intensității curentului pentru circuitul reprezentat în figură. Se cer: a) rezistența R și reactanța X a circuitului; b) căderile de tensiune rezistivă și capacitivă U_R, U_C; c) valoarea efectivă a tensiunii la bornele circuitului; d) factorul de putere al circuitului.

5.8.5. Pentru circuitul din problema precedentă se dau rezistența R, valoarea efectivă a tensiunii la borne U și valoarea efectivă a căderii de tensiune capacitive U_C. Se cer: a) valoarea efectivă a curentului; b) factorul de putere al circuitului; c) impedanța circuitului; d) puterea activă și puterea reactivă a circuitului.

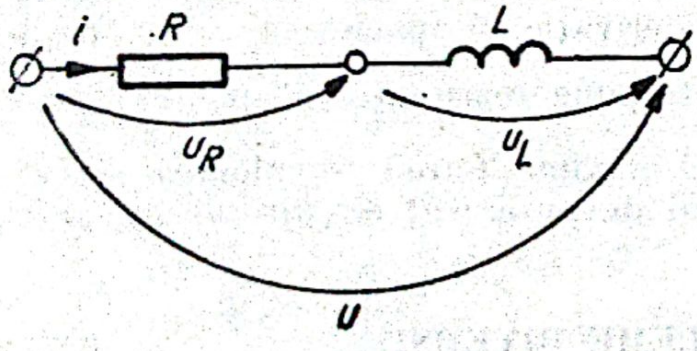


Fig. 5.8.6.

5.8.6. Să se indice, în ordine, formulele utilizate pentru a calcula din aproape în aproape mărimile cerute în funcție de mărimile date în tabelul de mai jos, care se referă la circuitul serie din figura alăturată.

Scanned with OKEN Scanner

Nr	Date	Cerute
1	R, L, ω, I	P, U, $\cos\varphi$
2	R, I, ω, U	Q, Z, X_L, $\cos\varphi$
3	P, I, U, f	Z, L, Q, $\cos\varphi$
4	U, X_L, P	R, I, Z, Q.

5.8.7. O bobină are tensiunea la borne $u = \sqrt{2}\,100 \sin 2\pi \cdot 500\, t$ V, ia o putere activă $P = 100$ W și o putere reactivă $Q = 200$ var. Se cer: a) rezistența și inductivitatea bobinei; b) impedanța bobinei; c) valoarea efectivă a curentului din bobină.

5.8.8. (R)** O sursă având t.e.m. $e = \sqrt{2}\,E \sin(\omega t + \gamma)$, rezistența internă r și reactanța internă x alimentează un receptor care ia o putere activă P și o putere reactivă Q. Se cer: a) rezistența R și reactanța X a receptorului; b) valoarea efectivă a intensității curentului debitat de sursă I; c) valoarea efectivă a tensiunii la bornele sursei U; d) randamentul sursei.

5.8.9. (R)* Ce relație există între rezistențele R, R', reactanțele X, X', și impedanțele Z, Z' a două receptoare care, conectate pe rînd la bornele aceleiași surse, primesc aceeași putere activă P și aceeași putere reactivă Q?

5.8.10.** Se știe că o sursă dă unui receptor conectat la bornele sale un curent $I = 3$ A și o putere activă $P_1 = 45$ W. Unui alt receptor conectat la locul primului receptor sursa îi dă aceeași putere activă și aceeași putere reactivă la un curent $I' = 4$ A. Știind că impedanța internă a sursei este $Z = 12\Omega$ se cer: a) impedanțele celor două receptoare; b) rezistențele și reactanțele celor două receptoare; c) puterea reactivă primită de receptoare; d) tensiunile la bornele celor două receptoare; e) factorul de putere al receptoarelor.

5.8.11. Un generator de curent alternativ are un curent de scurtcircuit cu valoarea efectivă I_{sc}, o tensiune în gol cu valoarea efectivă U_0 și poate da în exterior o putere activă maximă P_m. Se cer: a) valoarea efectivă a t.e.m. a generatorului; b) impedanța internă a generatorului; c) puterea pierdută prin efect Joule în interiorul generatorului la mers în scurtcircuit; d) rezistența și reactanța internă a generatorului.

5.8.12.* Se dă circuitul reprezentat în figura a, la care se cunosc mărimile $R = 5\Omega$ și $X = \dfrac{5}{\sqrt{2}}\ \Omega$. La sursa din figura b se cunoaște

Scanned with OKEN Scanner

numai valoarea efectivă a t.e.m. $E = 12$ V. Se cer : a) impedanţa internă a sursei dacă ea dă aceeaşi putere activă şi aceeaşi putere reactivă circuitului din figura a, indiferent la ce pereche de borne a

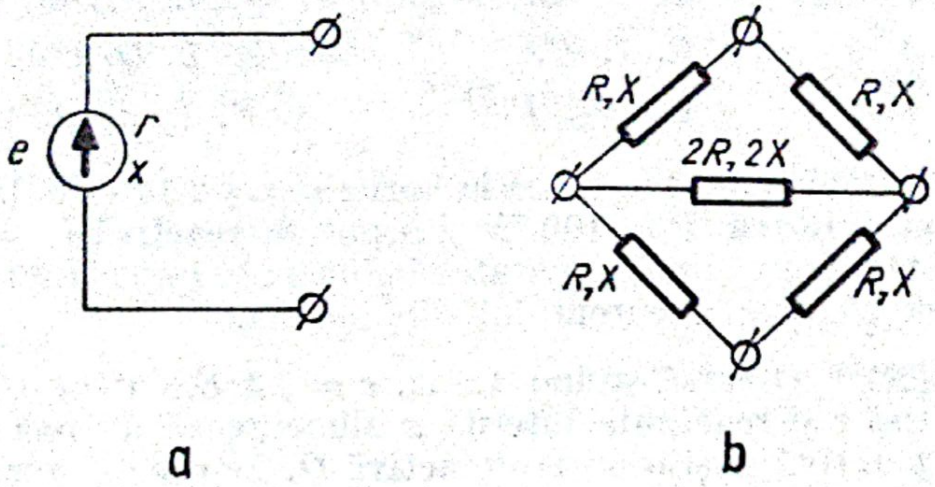


Fig. 5.8.12.

acestuia se conectează ; b) rezistenţa internă r şi reactanţa internă a sursei dacă se cunoaşte şi valoarea puterii active utile maxime a sursei $P_m = 12$ W ; c) factorul de putere al receptorului care absoarbe această putere activă utilă maximă ; d) puterile active, reactive şi randamentul pentru situaţia de la punctul (a).

5.8.13. (R)** Rezistoarele, bobina ideală şi condensatorul din circuitul reprezentat în figură au parametrii care satisfac relaţia

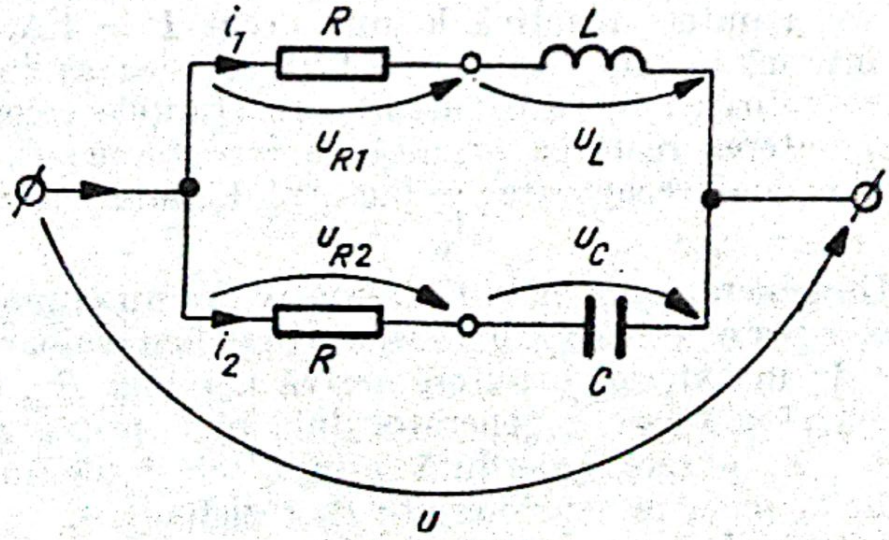


Fig. 5 .8.13.

$R = X_L = X_C$. Tensiunea de alimentare este $u = \sqrt{2}\, U \sin(\omega t + \gamma)$. Se cer : a) I, I_1, I_2 ; b) i, i_1, i_2 ; c) impedanţa echivalentă Z_e, rezistenţa echivalentă R_e şi reactanţa echivalentă X_e a circuitului ; d)

tensiunile U_{R1}, U_{R2}, U_L, U_C la bornele elementelor circuitului ; e) puterile totale, activă și reactivă ale circuitului.

5.8.14. (R)* Se știe că circuitul reprezentat în figură are, în regim sinusoidal, $R = 2\Omega$, $P_1 = 2\text{W}$, $Q_1 = -2$ var, $U_{m2} = 2\sqrt{2}$ V. Se cer : a) Q_2 ; b) U ; c) P, Q ; d) cos φ, pentru întregul circuit ; e) I.

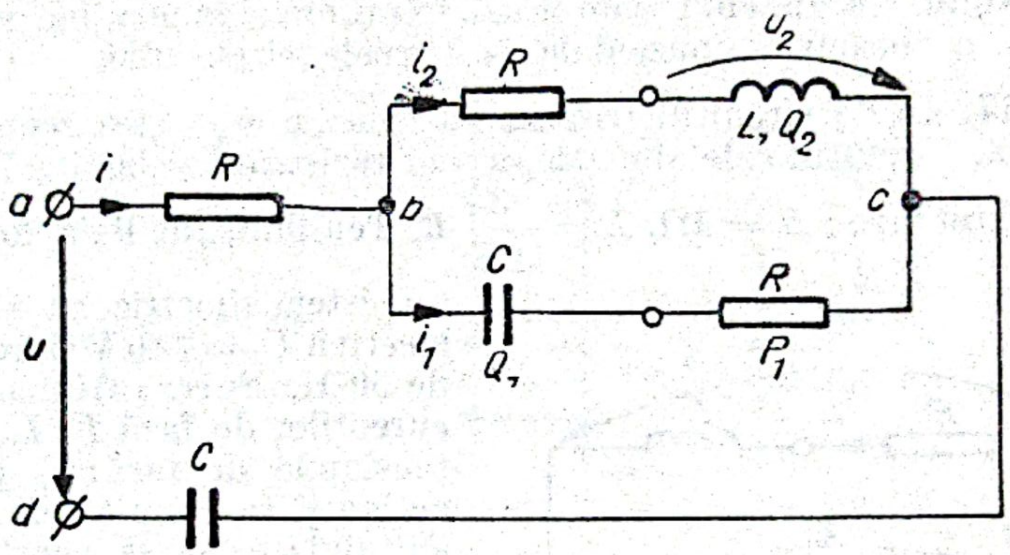


Fig. 5.8.14.

5.8.15. ** Se dă circuitul reprezentat în figură. Alimentat în curent continuu la o tensiune $u = u_C = 100$ V, circuitul ia o putere totală $P_t = 10$ W. Capacitatea fiecărui condensator este $C = 1$ μF.

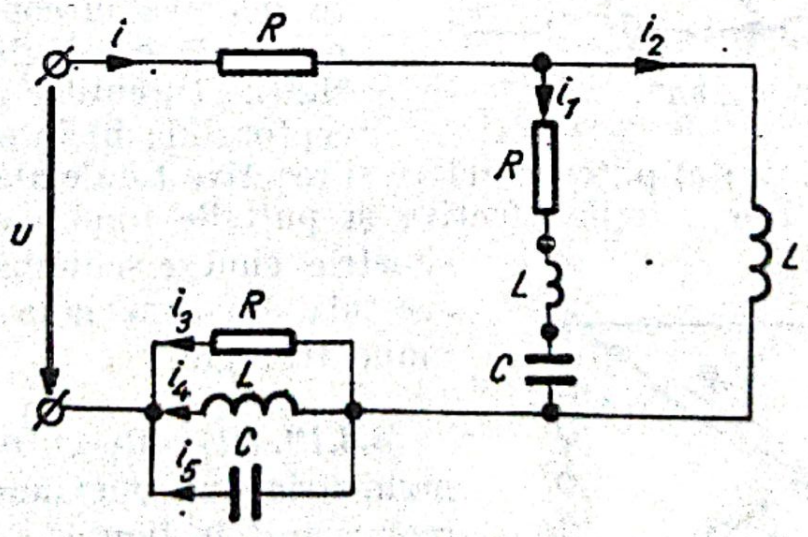


Fig. 5.8.15.

La frecvența $f_0 = \dfrac{1000}{2\pi}$ Hz se realizează în regim sinusoidal o rezonanță de tensiune în latura 1 și circuitul primește pe la borne o putere reactivă $Q_0 = 75$ var. Se cer pentru regimul sinusoidal :

a) R; b) X_{L0}; c) valoarea efectivă U_0 a tensiunii la bornele circuitului; d) P_0 puterea activă totală a circuitului; e) intensităţile curenţilor şi tensiunile la bornele elementelor.

5.8.16. (R)* Să se calculeze, pentru circuitul din problema precedentă, valoarea efectivă I a curentului total şi puterea activă a circuitului în cazul cînd se dublează frecvenţa şi se menţine valoarea efectivă a tensiunii sinusoidale la bornele circuitului.

5.8.17. Se dă circuitul trifazat cu conexiune în stea reprezentat în figură. Circuitul este simetric, avînd rezistoare şi bobine identice pe cele trei faze : $R = 4\Omega$, $L = \frac{3}{2\pi} R$. Tensiunile de linie formează un sistem simetric cu valoarea efectivă $U_l = 380$ V şi frecvenţa de 50 Hz. Se cer : a) intensităţile curenţilor de fază I_1, I_2, I_3; b) tensiunile de fază: c) puterile active şi reactive totale ale circuitului; d) să se construiască diagrama vectorială a tensiunilor şi curenţilor.

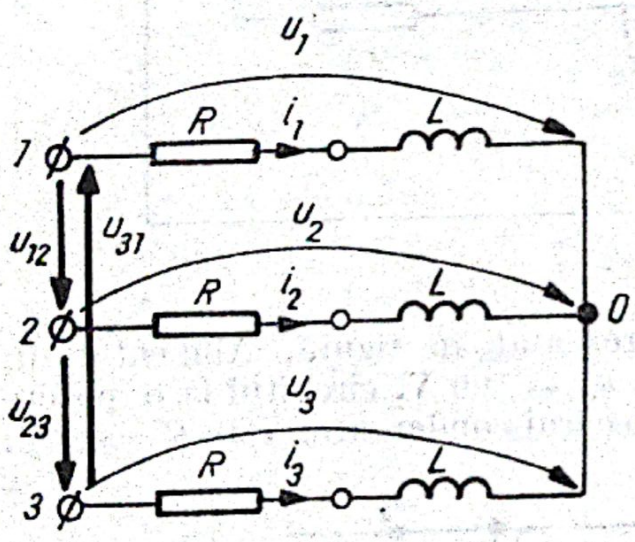


Fig. 5.8.17.

5.8.18. Conexiunea stea a circuitului din figura precedentă se schimbă în conexiune triunghi. Să se calculeze : a) intensităţile curenţilor din fazele receptorului; b) intensităţile curenţilor de linie; c) puterile active şi reactive totale ale circuitului; d) cum se măresc valorile efective şi puterile unui circuit trifazat simetric cînd se schimbă conexiunea acestuia din conexiune stea în conexiune triunghi.

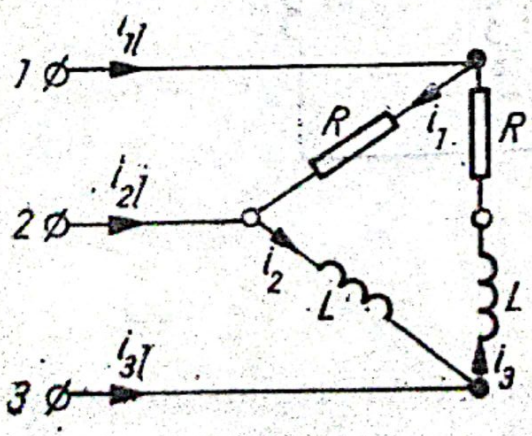


Fig. 5.8.19.

5.8.19. (R) Receptorul trifazat nesimetric cu conexiune în triunghi reprezentat în figură are $R = 8\Omega$ şi $X_L = 8\Omega$. Tensiunile de linie formează un sistem simetric $U_L = 380$ V. Se cer : a) curenţii de fază ai receptorului; b) curenţii de linie; c) puterile totale, activă şi reactivă.

Scanned with OKEN Scanner

5.8.20.* Dacă la bornele primare $1 - 1'$ ale transformatorului trifazat reprezentat în figură se aplică o tensiune sinusoidală de valoare efectivă $U_{1p} = 1000$ V, la bornele secundare $3-3'$ apare în

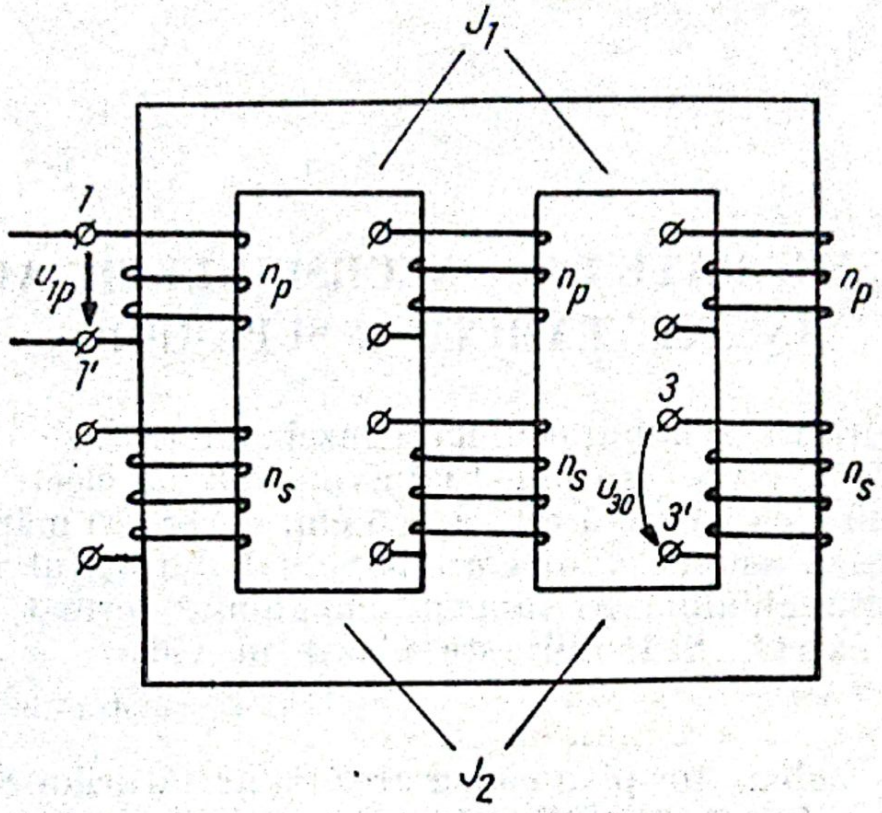


Fig. 5.8.20.

gol o tensiune cu valoarea efectivă $U_{3s} = 5$ V. Care este raportul numerelor de spire n_p/n_s? (Rezistențele magnetice ale „coloanelor C_1, C_2, C_3 sînt egale, iar rezistențele magnetice ale „jugurilor" J_1, J_2 sînt neglijabile).

6. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR

6.1. În vîrfurile și la mijlocul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel se află cîte un corp punctual avînd sarcina electrică pozitivă $q = 1\mu C$. Știind că o catetă este $a = 5$ cm, se cer : a) mărimea forței care acționează asupra unui corp punctual din vîrful unui unghi ascuțit al triunghiului; b) tangenta unghiului format de această forță cu o catetă. Sistemul este plasat în vid.

(Universitatea din Brașov, 1972)

6.2. Un condensator plan cu aer are aria armăturilor $S = 36\pi$ cm^2 și capacitatea $C = 5 \cdot 10^{-12}$ F. Să se determine : a) distanța dintre armături; b) capacitățile echivalente în cazul în care se leagă în serie și apoi în paralel zece astfel de condensatoare.

Se va lua : $36\,\pi\,10^9\,\varepsilon_0 = 1$.

(Institutul de construcții, București, subingineri, 1970)

6.3. Două condensatoare cu capacitățile $C_1 = 2\mu F$ și $C_2 = 5\mu F$ sînt încărcate separat la tensiunile $U_1 = 5\,500$ V și $U_2 = 2\,000$ V, apoi sînt legate în paralel. Să se determine tensiunea la bornele bateriei de condensatoare și sarcina fiecărui condensator, după legarea în paralel.

(Institutul de petrol, gaze și geologie, 1967)

6.4. O baterie de 6 elemente de acumulatoare grupate în serie, avînd fiecare t.e.m. E și rezistența interioară R_1, este legată în serie cu un rezistor cu rezistența R_2, format dintr-un fir cu lungimea $l = 16$ m, secțiunea $S = 1$ mm^2 și rezistivitatea $\rho = 4 \cdot 10^{-7}$ Ωm. Prin fir circulă un curent cu intensitatea $I_1 = 1{,}8$ A. Dacă se scurtcircuitează bornele bateriei, intensitatea curentului debitat de aceasta este $I_2 = 21$A. Să se calculeze : a) rezistența R_2; b) tensiunea U aplicată la bornele rezistorului R_2; c) cantitatea de căldură Q dega-

Scanned with OKEN Scanner

jată în rezistorul R_2 în timpul $t = 100$ s ; d) rezistența interioară R_1 a unui element de acumulator ; e) t.e.m. E a unui acumulator.

(Institutul politehnic, București, 1967)

6.5. Printr-un consumator cu rezistența $R = 100\Omega$ trece un curent cu intensitatea $I = 1$A, alimentarea făcîndu-se de la o sursă de curent continuu cu t.e.m. $E = 110$V și rezistența interioară $r = 2\Omega$, printr-un fir conductor cu secțiunea $S = 1$ mm² și rezistivitatea $\rho = 17 \cdot 10^{-9}$ Ωm. Să se determine : a) tensiunea la bornele consumatorului, puterea absorbită de acesta și căderea de tensiune pe firul de legătură ; b) variația temperaturii firului de legătură în timp de 10 minute, admițînd că toată energia dezvoltată la trecerea curentului prin fir este folosită pentru încălzirea lui ? Densitatea materialului din care este confecționat firul este $d = 8900$ kg/m³, căldura specifică a materialului $c = 376{,}2$ J/kg·grd.

(Institutul de construcții, București, 1968)

6.6. Un circuit, care cuprinde rezistorii R_1 și R_2 legați în serie, este alimentat de un generator cu tensiunea electromotoare $E = 12$ V. Tensiunea la bornele generatorului este $U = 10$ V. Pe rezistorul $R_1 = 4\Omega$ se produce o cădere de tensiune $U_1 = 8$ V. Rezistorul R_2 este construit dintr-un fir de aluminiu cu secțiunea $S = 0{,}6$ mm². Să se calculeze : a) intensitatea curentului din circuit ; b) rezistența interioară a generatorului ; c) lungimea firului de aluminiu.

Se dă $\rho = 3 \cdot 10^{-8}$ Ωm.

(Universitatea din Brașov, subingineri, 1972)

6.7. La bornele unei baterii de 6 elemente galvanice este legat un fir metalic de lungime $l = 36{,}75$ m, rezistivitate $\rho = 4 \cdot 10^{-7}$ Ωm și secțiune s, a cărui rezistență este $R = 29{,}4$ Ω. În fir se degajă o putere $P = 1{,}176$ W.

Se cere să se calculeze : a) secțiunea firului în mm² ; b) intensitatea I a curentului care circulă în fir ; c) în cît timp se degajă în fir căldura $Q = 56{,}445$ calorii ; d) tensiunea U la bornele firului ; e) tensiunea electromotoare și rezistența interioară a unui element, dacă prin scurtcircuitarea bateriei curentul crește la valoarea $I_0 = 10$ A.

(Institutul Politehnic, București, subingineri, 1972)

6.8. O baterie are tensiunea electromotoare $E = 32$ V și alimentează un circuit format dintr-un rezistor. Tensiunea la borne este $U = 30$ V, iar puterea consumată de rezistor $P = 6$ W. Se cer : a) intensitatea curentului din circuit ; b) rezistența interioară a bateriei ; c) timpul în care trece prin circuit o cantitate de electricitate

Scanned with OKEN Scanner

de 720 Coulombi; d) lungimea firului din care este confecționat rezistorul, dacă secțiunea lui este de 0,17 mm² și rezistivitatea $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-7}$ Ωm; e) energia consumată în rezistor în 10 minute.

(Universitatea din Brașov, subingineri, 1972)

6.9. Se consideră un fir de cupru avînd lungimea $l = 100$ m și rezistența $R_0 = 8{,}9$ Ω, la $\theta_0 = 0°C$. a) Cunoscînd densitatea cuprului $d_0 = 8\,900$ kg/m³ și rezistivitatea $\rho_0 = 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ωm, să se determine greutatea firului. b) Dacă firul se leagă la o sursă a cărei tensiune este $U = 2$ V, care va fi temperatura θ a firului după $t = 8$ h 8 min 1 s? Căldura specifică este $c = 376$ J/kg · grd. Se neglijează pierderile. c) Care va fi variația de volum a firului corespunzătoare acestei încălziri? Coeficientul de dilatare liniară fiind $\alpha = 1{,}78 \cdot 10^{-5}$ grad^{-1}. d) Să se determine valoarea rezistenței firului la temperatura determinată la punctul b. Coeficientul termic al rezistenței cuprului este $\beta = 3{,}8 \cdot 10^{-3}$ grd^{-1}. Se consideră $g = 10$ m/s².

(Universitatea din Brașov, Iulie 1972)

6.10. Într-un circuit alimentat de $n = 10$ elemente montate în serie, avînd fiecare t.e.m. $E = 2$ V și rezistența interioară $r_i = 0{,}4$ Ω, sînt legate în paralel un încălzitor cu rezistența $R_1 = 20$ Ω și un voltametru cu sare de nichel cu rezistența $R_2 = 4$ Ω. Se cer: a) rezistența echivalentă a circuitului exterior; b) intensitatea curentului prin bateria de elemente; c) intensitatea curenților prin încălzitor și prin voltametru; d) dacă randamentul termic al încălzitorului este 41,8 %, cîtă apă de 75° se poate aduce la temperatura de fierbere în timp de 20 minute și 10 secunde? $c = 4\,180$ J/kg·grd.; e) ce cantitate de nichel se depune la catodul voltametrului în același timp? Echivalentul electrochimic al nichelului este $k = 0{,}3$ mg/C.

(Institutul de construcții București, 1971)

6.11. Un circuit electric este compus dintr-o baterie de acumulatoare cu t.e.m. $E = 12$ V și rezistența interioară $r = 0{,}1$ Ω, un rezistor cu rezistența $R = 3$ Ω și un voltametru cu rezistența internă $R_v = 0{,}9$ Ω. Să se determine: a) tensiunea la bornele voltametrului; b) volumul ocupat de hidrogenul degajat în timp de 15 minute la presiunea de 760 torr și la temperatura de 20°C.

Se dau: tensiunea contraelectromotoare a voltametrului $E_c = 2$ V; numărul lui Faraday $F = 96\,500$ C/echiv·g, constanta gazelor perfecte $R = 62{,}4 \dfrac{\text{l} \cdot \text{Torr}}{\text{mol} \cdot \text{grd}}$ și masa atomică a hidrogenului $A = 1$.

(Institutul de petrol, gaze și geologie, 1972)

Scanned with OKEN Scanner

6.12. Un circuit electric conține o sursă având tensiunea electromotoare $E = 38$ V, rezistența interioară $r = 10^{-2} \cdot R_1\ \Omega$ și două rezistoare $R_1 = 5\ \Omega$ și $R_2 = 3\ R_1$ legate în paralel. Se cer: a) valoarea intensității curentului principal; b) valoarea intensității curentului care trece prin rezistorul R_1; c) de cîte ori se mărește intensitatea curentului prin R_1 dacă rezistorul R_2 se scoate din circuit?

(Universitatea din Brașov, subingineri, 1972)

6.13. La bornele unei baterii formate din $n = 20$ elemente, legate în serie, fiecare având tensiunea electromotoare $e = 1{,}5$ V și rezistența interioară $r = 0{,}15\ \Omega$, se conectează un rezistor cu rezistența $R = 20\ \Omega$, în paralel cu un fir metalic de lungime $l_1 = 450$ m, secțiune $S = 3 \cdot 10^{-7}$ m² și rezistență $R_f = 30\ \Omega$.

Se cere să se calculeze: a) tensiunea U la bornele rezistorului; b) intensitățile I_R și I_f ale curenților în rezistor și, respectiv, în fir; c) rezistivitatea ρ a firului; d) puterea electrică P și căldura Q în calorii degajată în rezistor în 20 minute; e) ce lungime l_2 ar trebui să aibă firul pentru ca tensiunea la bornele rezistorului să scadă la valoarea $U' = 0{,}9\ U$.

(Institutul politehnic, București, 1972)

6.14. Două rezistoare cu rezistențele x și y sînt legate în paralel la bornele unei surse cu t.e.m. $E = 16$ V și rezistența interioară $r = 1{,}22\ \Omega$. Știind că intensitatea curentului debitat de sursă este $I = 0{,}5$ A și că $x + y = 200\ \Omega$, să se calculeze: a) rezistențele x și y; b) intensitățile curenților în rezistoarele x și y; c) tensiunea la bornele sursei; d) puterea consumată în rezistoare.

(Institutul politehnic, București 1968)

6.15. Se consideră un circuit format din două voltametre legate în paralel, având rezistențele $R_1 = 20\ \Omega$ și $R_2 = 15\ \Omega$, alimentate de o baterie cu tensiunea electromotoare $E = 90$ V și rezistența interioară $r = 6\Omega$. Se cer: a) rezistența totală a circuitului; b) intensitatea curentului ce trece prin fiecare voltametru; c) cantitatea totală de cupru depusă în voltametre în timpul $t = 10$ minute. Se dă echivalentul electrochimic al cuprului $k = 0{,}3 \cdot 10^{-6}$ kg/C.

(Universitatea din Brașov, subingineri, 1972)

6.16. Se realizează montajul din figura alăturată și se dau: $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$, $r = 0{,}6\ \Omega$ și intensitatea $I_2 = 3$ A, prin rezistorul R_2. Să se calculeze: a) intensitățile curenților din R_1 și R_3; b) valoarea tensiunii electromotoare a bateriei; c) tensiunea la capetele rezistorului R_1 și tensiunea la bornele bateriei; d) să se

Scanned with OKEN Scanner

calculeze puterea bateriei şi să se verifice dacă ea este egală cu puterea consumată în rezistoarele montajului.

(Institutul de construcţii, Bucureşti, subingineri, 1970)

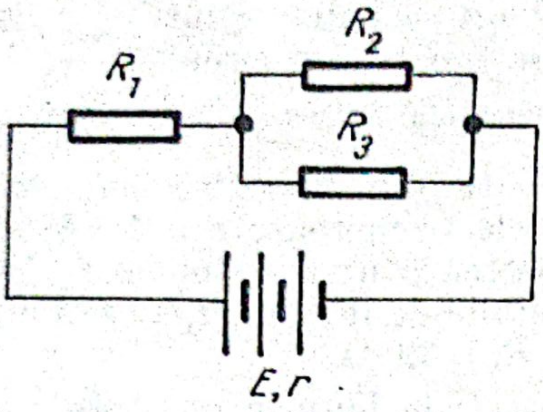


Fig. 6.16.

6.17. O baterie de curent continuu cu t.e.m. $E = 12$ V şi de rezistenţă interioară neglijabilă alimentează un circuit format din rezistorul R_1 legat în serie cu două rezistoare avînd rezistenţele $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 6\Omega$, montate în paralel.

Să se determine : a) valoarea rezistenţei R_1 cînd prin circuit trece curentul total $I = 2$ A ; b) intensităţile curenţilor prin rezistoarele R_2 şi R_3 ; c) energia care se dezvoltă în rezistoarele R_2 şi R_3 în timp de 30 minute.

(Institutul de construcţii, Bucureşti, 1972)

6.18. Circuitul din figură alcătuit din rezistoarele R_1 şi R_2 legate în paralel este alimentat în curent continuu de la sursa de t.e.m. $E = 130$ V şi rezistenţa interioară $r = 1\ \Omega$, aflată la distanţa $d = 100$ m. Rezistenţa firelor de legătură este $R_f = 3{,}4\ \Omega$, iar mate-

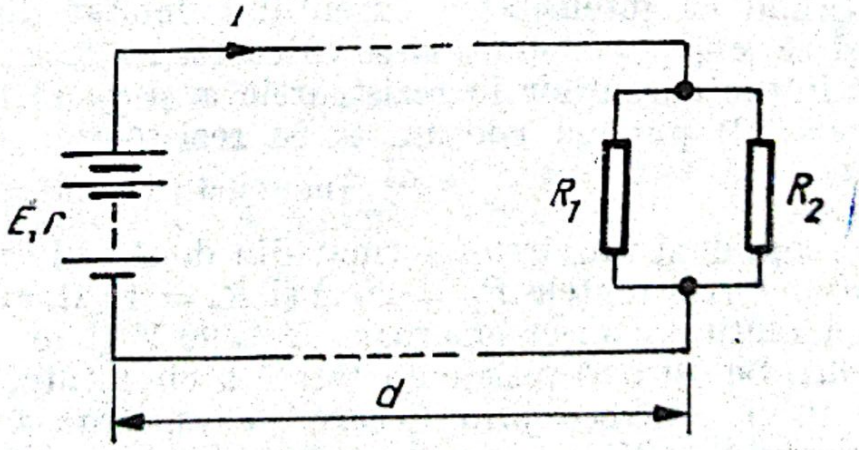


Fig. 6.18.

rialul din care sînt făcute firele are rezistivitatea $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m. Ştiind că intensitatea curentului în firele de legătură este $I = 5$ A şi că rezistenţa $R_1 = 64{,}8\ \Omega$, se cer : a) tensiunea la bornele sursei ; b) căderea de tensiune pe firele de legătură ; c) secţiunea firelor de legătură : d) valoarea rezistenţei R_2 ; e) puterea dezvoltată pe circuitul alcătuit din cele două rezistoare R_1 şi R_2.

(Institutul de construcţii, Bucureşti, subingineri, 1972)

Scanned with OKEN Scanner

6.19. Un generator de curent continuu cu excitație în derivație alimentează un bec cu incandescență și un rezistor de 15,9 Ω, legat în paralel cu becul. Generatorul are t.e.m. de 110 V, rezistența indusului de 0,5 Ω, rezistența inductorului de 30 Ω, iar intensitatea curentului în indus de 12 A. Să se calculeze: a) puterea furnizată becului; b) cantitatea de căldură degajată în timp de o oră de rezistorul legat în paralel cu becul.

(Facultatea de fizică, București, 1967)

6.20. O baterie de tensiunea electromotoare $E = 14$ V și rezistența interioară $r = 0{,}5\ \Omega$ debitează pe un sistem de rezistoare cu rezistențele $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$ și $R_4 = 4\ \Omega$, montate ca în figură.

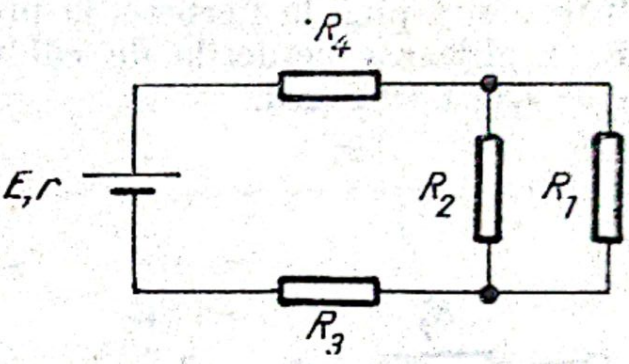


Fig. 6.20.

Să se calculeze: a) intensitatea curentului debitat de baterie și intensitățile I_1 și I_2 ce parcurg rezistoarele R_1 și, respectiv, R_2; b) randamentul bateriei; c) masa depusă la catodul unui voltametru cu sare de cupru și electrozi de cupru care are rezistența $R_v = 2\Omega$ montat în circuitul de mai sus în locul rezistenței R_4. Se va considera un timp egal cu timpul în care aceeași baterie debitează în circuitul nou format energia $W = 35\,280$ J. Echivalentul electrochimic al cuprului este $k = 0{,}33$ mg/C.

(Institutul de construcții, București, 1972)

6.21. La bornele unei baterii galvanice cu t.e.m. $E = 12$ V și rezistența interioară $r = 0{,}5\ \Omega$ sînt conectate în paralel două rezistoare avînd rezistențele R_1 și R_2. Cantitatea de căldură dezvoltată în cele două rezistoare, în timp de o oră și jumătate este $Q = 62{,}1$ kJ. Se cer: a) rezistența echivalentă R_e a celor două rezistoare R_1 și R_2 legate în paralel; b) intensitatea curentului debitat de baterie; c) rezistențele R_1 și R_2, știind că atunci cînd se deconectează R_1, intensitatea curentului din circuit scade la jumătate din valoarea inițială.

(Institutul politehnic, București, 1969)

6.22. Circuitul exterior al unei surse de curent continuu, cu t.e.m. $E = 24$ V și rezistența interioară $r_i = 0{,}5\ \Omega$, este alcătuit dintr-un rezistor cu rezistența $R = 1{,}9\ \Omega$ în serie cu un grup de două becuri legate în paralel. Puterile absorbite de cele două becuri sînt $P_1 = 24$ W, respectiv $P_2 = 36$ W. Să se determine: a) intensitatea I a curentului care trece prin rezistor și rezistența echivalentă R_2 a

Scanned with OKEN Scanner

celor două becuri ; b) tensiunea U la bornele becurilor ; c) intensităţile I_1 şi I_2 ale curenţilor prin becuri şi rezistenţele R_1 şi R_2 ale acestora ; d) rezistenţa R_x ce ar trebui legată în paralel cu R pentru ca becurile să absoarbă o putere $P = 86{,}4$ W.

(Institutul politehnic, Bucureşti, 1969)

6.23. Un încălzitor electric, avînd schema din figură şi rezistenţele rezistoarelor $R_1 = 140\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$, $R_4 = 3\ \Omega$ şi $R_5 = 2\ \Omega$, dezvoltă în timp de 1 minut şi 40 de secunde o cantitate de căldură $Q = 10$ kJ. Se cer : a) tensiunea electrică U la bornele încălzitorului ; b) masa de apă, cu temperatura iniţială de 80°C, ce poate fi încălzită pînă la fierbere, la presiunea normală, în timpul indicat. Se neglijează pierderile de căldură. Căldura specifică a apei este $c = 4{,}18$ kJ/kg·grd.

(Facultatea de fizică, Bucureşti, 1969)

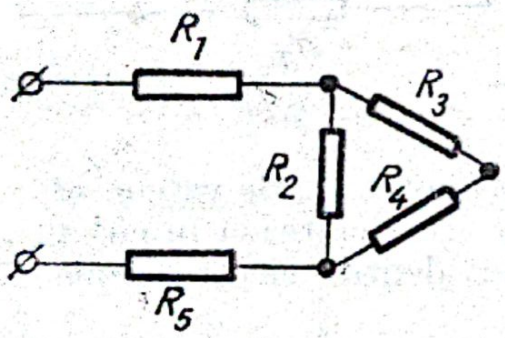


Fig. 6.23.

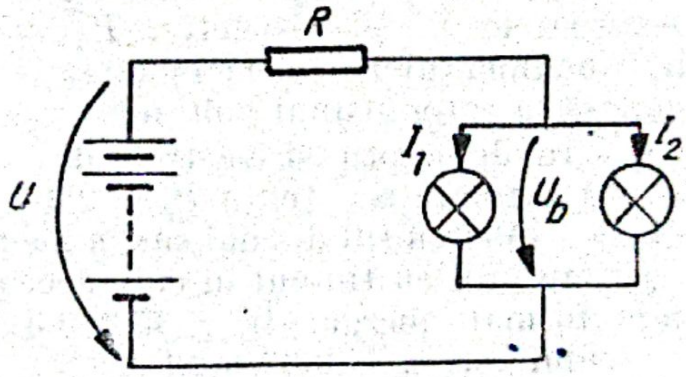


Fig. 6.24.

6.24. O baterie de acumulatoare cuprinde $n = 12$ elemente legate în serie ; fiecare element are o tensiune electromotoare $e = 1{,}8$ V şi o rezistenţă interioară $r = 0{,}05\ \Omega$. Bateria alimentează un circuit format dintr-un rezistor avînd rezistenţa $R = 1\ \Omega$ legat în serie cu un montaj de două becuri cu puteri diferite, legate în paralel, ca în figură. Intensităţile curenţilor prin becuri fiind $I_1 = 2$ A şi $I_2 = 4$ A, se cer : a) tensiunea U la bornele bateriei şi tensiunea U_b la bornele becurilor ; b) rezistenţele R_1 şi R_2 ale becurilor ; c) puterile P_1 şi P_2 ale becurilor ; d) energia totală consumată de becuri în timp de 10 minute ; e) rezistenţa R_{10} a primului bec la temperatura $t_0 = 0$°C, ştiind că rezistenţa R_1 corespunde temperaturii $t = 2\,000$°C, iar coeficientul termic al rezistivităţii materialului filamentului este $\alpha = 0{,}005\ \text{grd}^{-1}$.

(Institutul politehnic, Bucureşti, subingineri, 1970)

Scanned with OKEN Scanner

6.25. În reţeaua din figură, becurile B_1 şi B_2 sînt construite pentru o tensiune $U_1 = 110$ V, iar becul B_3 pentru tensiunea $U_2 = 220$ V. Puterile becurilor, la aceste tensiuni, sînt $P_{B_1} = 60$ W, $P_{B_2} = 100$ W şi $P_{B_3} = 200$ W, iar puterea consumatorului C este $P_C = 500$ W.

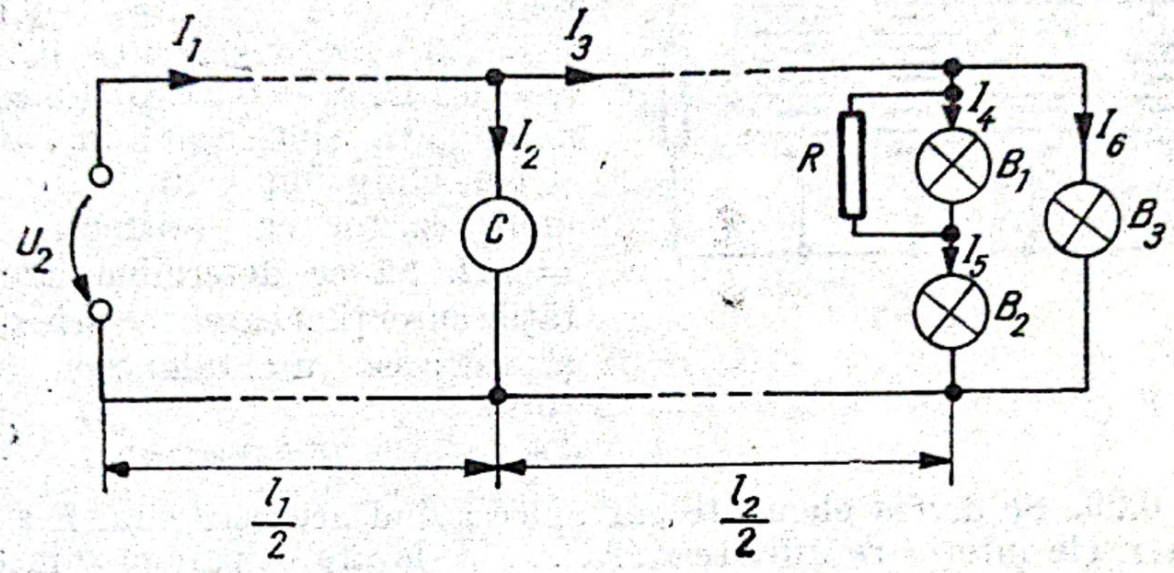


Fig. 6.25.

a) Care este rezistenţa R a unui rezistor care, montat în paralel cu becul B_1, asigură funcţionarea normală a celor trei becuri la tensiunile pentru care au fost construite? b) Neglijînd rezistenţele firelor de legătură, să se calculeze intensităţile I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 şi I_R indicate în figură. c) Care este puterea dezvoltată în rezistorul R? d) Dacă se consideră rezistenţele firelor de legătură, să se calculeze puterea pierdută în aceste fire, avînd lungimile $l_1 = l_2 = 25$ m, diametrele $D_1 = D_2 = 3$ mm şi rezistivitatea $\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ωm. Se presupune că intensităţile curenţilor prin fire sînt egale cu cele de la punctul b.

(Institutul politehnic, Bucureşti, subingineri, 1971)

6.26. O baterie de acumulatoare este alcătuită din 20 de elemente grupate cîte 5 în serie. Cele patru grupe rezultate sînt legate în paralel şi debitează pe o rezistenţă $R = 4{,}075$ Ω. Tensiunea electromotoare a fiecărui element este $e = 2$ V, iar rezistenţa interioară a fiecărui element este $r_i = 0{,}02$ Ω.

Să se calculeze: a) tensiunea electromotoare furnizată de întreaga baterie şi rezistenţa interioară a bateriei; b) intensitatea curentului principal I şi intensitatea curenţilor prin fiecare element i; c) ten-

siunea la bornele rezistorului R; d) intensitatea I' a curentului în baterie şi i' în fiecare element, la scurtcircuit ($R = 0$).

(Institutul de construcţii, Bucureşti, 1970)

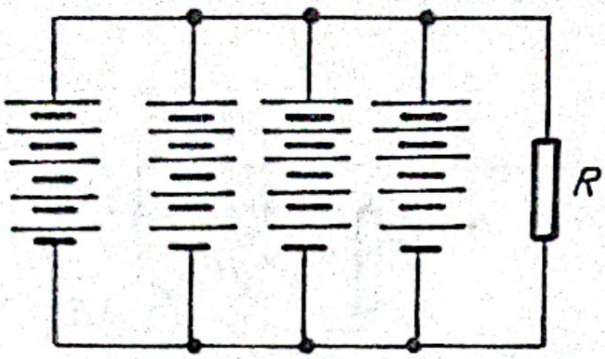


Fig. 6.26.

6.27. Trei surse de energie electrică, avînd tensiunile electromotoare $E_1 = 1{,}2$ V, $E_2 = 1{,}1$ V, $E_3 = 1{,}3$ V, cu rezistenţele interne $r_1 = 0{,}1\ \Omega$, $r_2 = 0{,}2\Omega$ şi, respectiv, $r_3 = 0{,}3\ \Omega$, sînt legate în paralel şi conectate împreună la bornele unui rezistor cu rezistenţa $R = 2\ \Omega$. Să se determine intensităţile curenţilor care trec prin surse şi valoarea curentului prin rezistorul R.

(Facultatea de fizică, Bucureşti, iulie 1972)

6.28. Se dau n elemente galvanice avînd aceeaşi t.e.m. E şi rezistenţele interioare diferite $r_1, r_2, \ldots, r_n$ legate în paralel şi închise printr-un rezistor exterior de rezistenţă R. Se cer: a) intensitatea curentului prin fiecare element şi în rezistorul R; b) puterile furnizate de fiecare element; c) puterea degajată sub formă de căldură în interiorul fiecărui element şi în circuitul exterior.

(Academia de studii economice, 1969)

6.29. Un voltmetru V_1 fiind conectat între două puncte A, B ale unui circuit de curent continuu indică o diferenţă de potenţial de 100 V. Un alt voltmetru V_2 indică între aceleaşi puncte 102 V, iar un al treilea voltmetru V_3, a cărui rezistenţă internă este infinită, indică 104 V. Dacă se întrerupe circuitul între cele două puncte, voltmetrul al treilea indică 130 V. Să se determine rezistenţa r a circuitului între cele două puncte, rezistenţa totală R a circuitului şi rezistenţa R_2 a celui de-al doilea voltmetru, ştiind că primul voltmetru are rezistenţa $R_1 = 13\ \text{k}\Omega$.

(Facultatea de fizică, Iaşi, 1970)

6.30. La bornele unei baterii de acumulatoare cu t.e.m. $E = 24$ V şi rezistenţa interioară $r = 0{,}5\ \Omega$ este conectat un voltametru avînd rezistenţa $R_1 = 2\ \Omega$, în serie cu un rezistor avînd rezistenţa $R_2 = 3{,}5\ \Omega$. În voltametru se găseşte o soluţie de azotat de argint. Pentru a măsura tensiunea la bornele voltametrului şi curentul prin circuit, se folosesc două aparate de măsură identice; unul este utilizat ca ampermetru, iar celălalt ca voltmetru. Aparatele de

Scanned with OKEN Scanner

măsură au fiecare o rezistență $r_0 = 9{,}8\ \Omega$ și permit trecerea unui curent cu o intensitate maximă $i_0 = 0{,}1$ A. Se cer : a) să se determine rezistența r_s a șuntului cu care trebuie prevăzut aparatul folosit ca ampermetru, în vederea măsurării unor curenți pînă la 5 A ; b) să se determine rezistența adițională r_a care trebuie legată în serie cu aparatul folosit ca voltmetru, în vederea măsurării unor tensiuni pînă la 30 V ; c) să se construiască schema electrică a circuitului în care sînt cuprinse atît aparatele de măsură, cît și rezistențele determinate la punctele a și b ; să se calculeze intensitatea curentului debitat de bateria de acumulatoare ; d) să se determine cantitatea de argint depusă pe catodul voltametrului în timp de două ore. Echivalentul electrochimic al argintului este $k = 4{,}025$ g/A · h.

(Institutul politehnic, București, 1969)

6.31. Se consideră circuitul din figură format din trei rezistoare cu rezistențele $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$ și un voltametru cu sare de cupru. Circuitul este alimentat de o baterie cu tensiunea t.e.m. $E = 12$ V și rezistența interioară $r = 1\Omega$. La catodul voltametrului se depun $m = 0{,}66$ g de cupru în timpul $t = 1\,000$s. Echivalentul electrochimic al cuprului este $k = 0{,}33$ mg/C. Se cer : a) intensitatea curentului ce trece prin voltametru ; b) intensitățile curenților ce trec prin ramura ABC și prin baterie, precum și valoarea R_v a rezistenței voltametrului ; c) energia debitată de baterie pe circuitul exterior în timp de o oră ; d) dacă între punctele B și D se conectează un galvanometru, ce valoare trebuie să aibă o rezistență R_4, care, conectată în locul voltametrului, face ca între punctele B și D să nu circule curent ? e) Dacă galvanometrul conectat între B și D are rezistența interioară $R_g = 10\,000\Omega$ și suportă un curent maxim $I_g = 10^{-6}$ A, ce valoare trebuie să aibă rezistența unui șunt pentru a-l face să măsoare curentul maxim $I'_g = 10^{-3}$ A ?

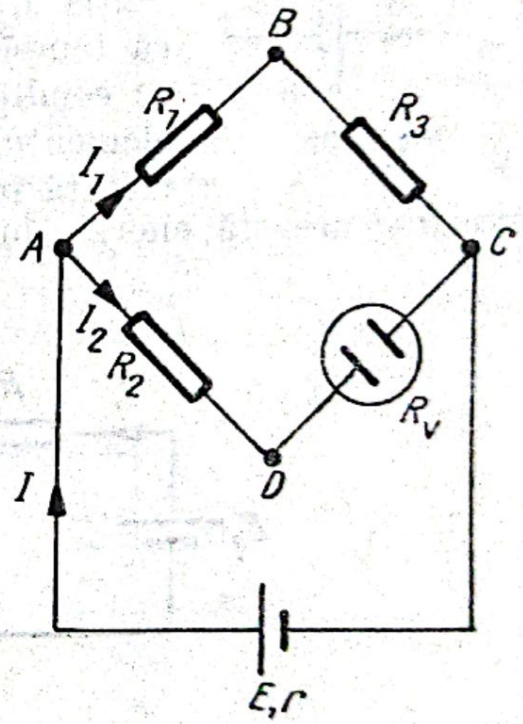


Fig. 6.31.

(Institutul de construcții, București, 1972)

6.32. Se dau două elemente galvanice legate prin rezistoarele R_1, R_2 și R_3, ca în figură. Cele două elemente au t.e.m. E_1 și E_2 și rezis-

tențele interioare neglijabile. Se cer: a) intensitățile curenților I_1, I_2 și I_3; b) să se discute sensul curenților în funcție de E_1, E_2, R_1, R_2, R_3; c) condiția ca prin rezistorul R_3 să nu circule curent.

(Academia de studii economice, 1969)

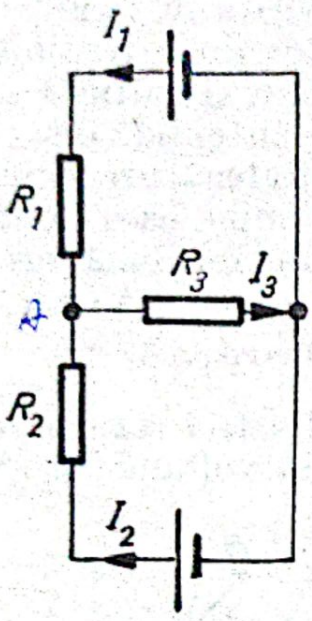


Fig. 6.32.

6.33. În circuitul din schemă, cele două elemente au t.e.m. $E_1 = 1{,}5$ V; $E_2 = 1$ V, iar rezistențele valorile $R_1 = 50\ \Omega$; $R_2 = 80\ \Omega$; $R_3 = 100\ \Omega$. Rezistențele interioare ale celor două elemente sînt neglijabile. Rezistoarele sînt confecționate dintr-un material cu rezistivitatea $2 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m și coeficientul termic al rezistivității $a = 4 \cdot 10^{-3}$ grd^{-1}, cu secțiunea 0,1 mm^2. Se cer: a) intensitatea I a curentului din ramura $A-B$; b) lungimea firului din care este confecționată rezistența R_1; c) valoarea rezistenței R_3 la temperatura de 500°C, presupunînd că temperatura inițială a rezistoarelor este 0°C; d) condiția pentru care nu circulă curent prin elementul E_2; e) valoarea energiei electrice dezvoltată în rezistorul R_1 în timp de 2,5 ore. Să se exprime această energie în kWh.

(Institutul de construcții, București, 1971)

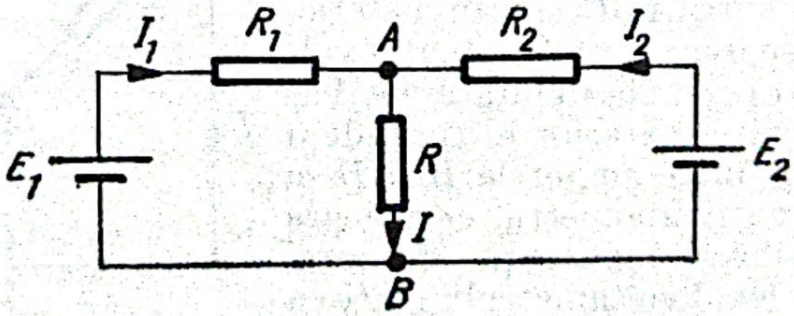


Fig. 6.33.

6.34. Se dă circuitul electric reprezentat mai jos în figură, în care sursa are tensiunea electromotoare $E = 5{,}2$ V și rezistența internă $r = 1\ \Omega$, iar rezistoarele au rezistențele $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$. Se cer: a) rezistența R_x astfel încît curentul debitat de sursă cînd comutatorul K întrerupe latura CD să aibă valoarea $I' = 1$ A; b) energia debitată de sursă în exterior în timp de 2 minute în cazul de la punctul a; c) valoarea I'' a curentului debitat de sursă după

închiderea comutatorului K, rezistența R_x având valoarea de la punctul a; d) valoarea rezistenței R_x pentru ca tensiunea la bornele CD să fie nulă și în cazul cînd întrerupătorul K este deschis; e)

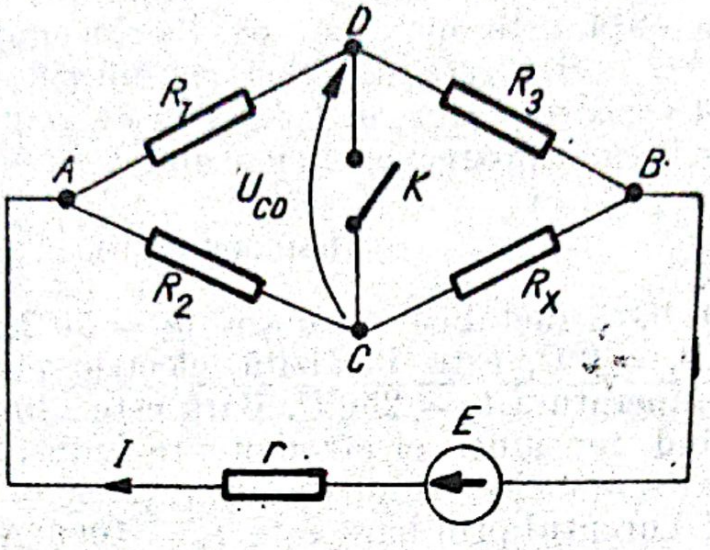


Fig. 6.34.

capacitatea C a unui condensator care, legat între bornele CD, se încarcă cu o sarcină $Q = 10^{-6}$ C, cînd $R_x = 4\ \Omega$.

(Institutul politehnic, București, subingineri, 1970)

6.35.* O baterie de acumulatoare formată din $n_1 = 6$ elemente este legată la bornele unui receptor având rezistența R; tot la bornele acestui receptor se leagă o derivație care comportă o baterie formată

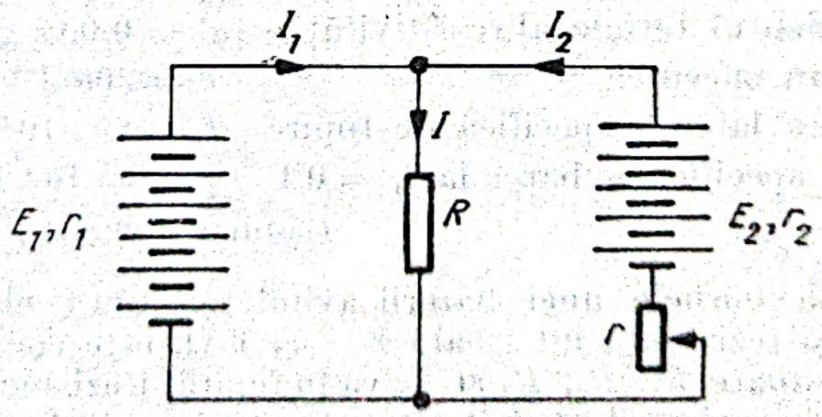


Fig. 6.35.

din $n_2 = 5$ elemente conectată în serie cu un reostat a cărui rezistență r poate fi variată între 0 și 100 Ω. Fiecare element al bateriilor are tensiunea $e = 2$ V și rezistența internă $r_1 = 0{,}2\ \Omega$. a) Să se calculeze rezistența R pentru care curentul debitat de prima baterie este

independent de rezistența r a reostatului. b) Să se reprezinte grafic curenții debitați de fiecare baterie, în funcție de rezistenta r a reostatului pentru cazul $R = 2\ \Omega$. c) Să se calculeze în cazul $r = 0$ valoarea R_1 a rezistenței R pentru care puterea electrică dezvoltată în această rezistență este maximă. d) La începutul funcționării, temperatura rezistenței R este de 0°C. După un timp de funcționare, valoarea acestei rezistențe devine $1{,}2\ R$; la ce temperatură se află rezistența, știind că valoarea coeficientului termic este $\alpha = 0{,}004$ grad^{-1}.

(Institutul politehnic, București, iulie 1970)

6.36.** O bară metalică cu masa $m = 50$ kg, avînd temperatura inițială $t_1 = 0$°C, este încălzită electric pînă la topirea ei completă la temperatura $t_2 = 250$°C. Bara este alimentată de la un dinam șunt avînd tensiunea electromotoare indusă constantă $E = 10{,}5$ V și rezistența circuitului de excitație $r_e = 0{,}1\ \Omega$. La începutul încălzirii curentul prin bară este $I_1 = 1000$ A, iar la atingerea temperaturii de topire curentul prin bară este $I_2 = 525$ A. Se cer: a) rezistența r a rotorului dinamului; b) curba de variație în funcție de temperatură a puterii dezvoltate prin efect electrocaloric în bara metalică, de la începutul încălzirii pînă la atingerea temperaturii de topire; c) lungimea barei metalice la $t_1 = 0$°C; d) energia necesară încălzirii barei pînă la topirea ei completă. Rezistența rotorului și a circuitului de excitație se presupun constante.

Caracteristicile fizice ale materialului barei sînt:

— rezistivitatea electrică la $t_1 = 0$°C $\quad \rho_1 = 4 \cdot 10^{-6}$ mΩ
— coeficientul termic al rezistivității $\quad \alpha = 0{,}004$ grd^{-1},
— căldura specifică $\quad c = 200$ J/kg · grd,
— căldura latentă specifică de topire $\quad L = 60 \cdot 10^3$ J/kg,
— masa specifică a barei la $t_1 = 0$°C $\quad \gamma = 5 \cdot 10^3$ kg/m^3.

(Institutul politehnic, București, 1970)

6.37.* La bornele unei baterii avînd tensiunea electromotoare $E = 22$ V și rezistența interioară $r_i = 1{,}1\ \Omega$, este conectat ansamblul de rezistoare R_1, R_2, R_3 și R, ca în figură. Rezistența circuitului conectat la bornele a, b ale bateriei este egală cu R. Puterea în rezistorul R este $P = 27{,}5$ W. Se cere să se determine: a) valoarea rezistenței R, știind că puterea dată de baterie în exterior este maximă; b) intensitățile curenților din rezistoarele R_1, R_2, R_3 și R; c) Rezistențele R_1 și R_2 în funcție de rezistența R_3 și domeniul în care poate fi cuprinsă valoarea rezistenței R_3; d) lungimea și aria secțiunii conductorului rezistorului R, știind că în intervalul de timp $t = 10$ s,

Scanned with OKEN Scanner

rezistența R crește cu 0,5% (puterea P rămînînd constantă, pierderile de căldură spre exterior fiind neglijabile, iar temperatura rezistorului R la începutul încălzirii fiind 0°C).

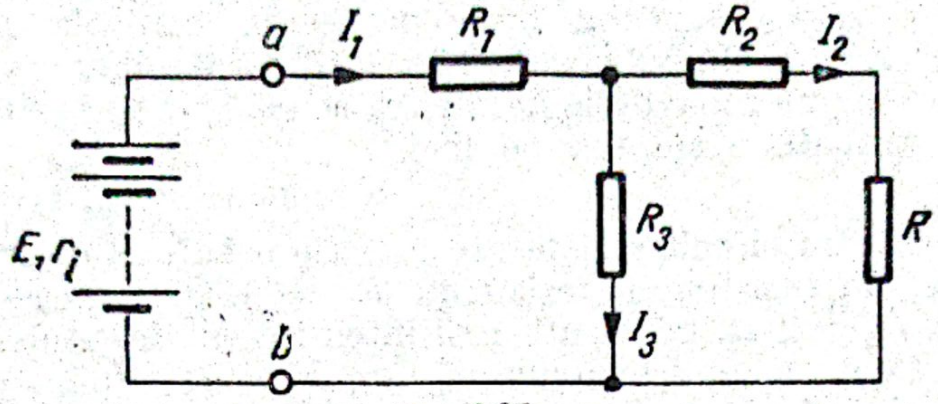


Fig. 6.37.

Materialul din care s-a confecționat rezistorul R are:
— rezistivitatea $\rho = 0{,}02\ \Omega\ mm^2/m$ la temperatura $\theta = 0°C$,
— căldura specifică $c = 400\ J/kg \cdot grd$,
— densitatea $d = 8{,}9\ kg/dm^3$,
— coeficientul de variație cu temperatura $\alpha = 0{,}004\ grd^{-1}$.

(Institutul politehnic, București, 1971)

6.38. Într-un circuit electric sînt legate în serie: un dinam avînd t.e.m. $E = 120$ V și rezistența interioară $R_i = 3\ \Omega$, un solenoid cu lungimea $l = 20$ cm, $N = 200$ de spire și rezistența înfășurării $R_1 = 4\ \Omega$, un voltametru cu soluție de $CuSO_4$ avînd rezistența $R_2 = 5\ \Omega$ și un rezistor cu rezistența R_3. După un timp de un sfert de oră în voltametru se depun $m = 2$ g de cupru. Se cer: a) intensitatea I a curentului electric din circuit, echivalentul electrochimic al cuprului fiind $k = 0{,}33$ mg/C; b) intensitatea H a cîmpului magnetic pe axul solenoidului; c) fluxul magnetic ce străbate o spiră a solenoidului cu diametrul $D = 6$ cm; d) rezistența R_3; e) randamentul electric al dinamului.

(Institutul politehnic, București, 1967)

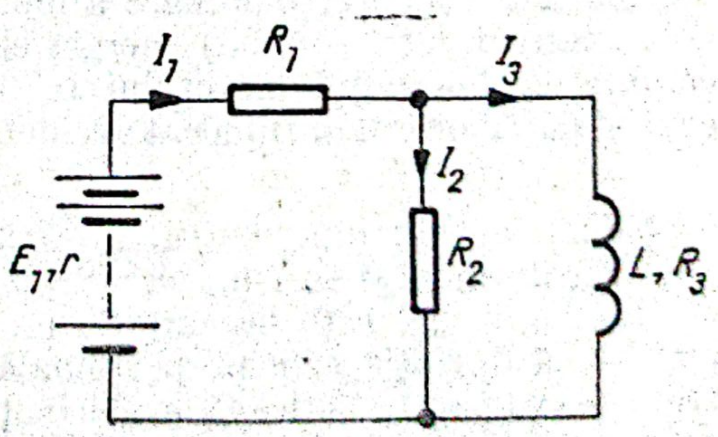


Fig. 6.39.

6.39. Circuitul electric din figură este alcătuit dintr-o baterie de 6 elemente galvanice, avînd fiecare t.e.m. $E_1 = 2$ V și rezistența interioară $r = 0{,}15\ \Omega$, două rezistoare, cu rezistențele $R_1 = 5\ \Omega$

și $R_2 = 7\ \Omega$ și o bobină avînd lungimea $l = 20$ cm, diametrul $D = 4$ cm, $N = 300$ de spire și rezistența înfășurării $R_3 = 3\ \Omega$. Se cer: a) tensiunea la bornele bateriei în gol și legată în circuit; b) intensitatea I_1 a curentului bateriei; c) intensitățile I_2 și I_3; d) cantitatea de căldură dezvoltată în R_2 după 2 minute; e) intensitatea H a cîmpului magnetic de pe axa solenoidului; f) fluxul magnetic ce străbate o spiră a bobinei.

(Institutul politehnic, București, 1966)

6.40. Într-un circuit sînt legate în serie o baterie de 20 de acumulatoare, un rezistor cu rezistența $R_1 = 11\ \Omega$ și un solenoid cu rezistența $R_2 = 2\ \Omega$. Să se afle: a) intensitatea curentului electric, știind că t.e.m. a unui acumulator este $E_1 = 2{,}1$ V, iar rezistența interioară $r_1 = 0{,}05\ \Omega$; b) intensitatea H a cîmpului magnetic pe axul solenoidului, știind că acesta are $N = 500$ de spire și lungimea $l_1 = 25$ cm; c) fluxul magnetic φ ce străbate o spiră, raza acesteia fiind $R = 3$ cm; d) lungimea l_2 a firului de constantan din care este construit rezistorul R_1, secțiunea firului fiind $s = 2$ mm^2, iar rezistivitatea $\rho = 0{,}49\ \Omega$ mm^2/m; e) creșterea $\Delta\theta$, în timpul $t = 20$ minute, a temperaturii celor $m = 1{,}5$ kg de ulei, cu căldura specifică $c = 3\,350$ J/kg · grd, în care este introdus rezistorul R_1. Se presupune că toată căldura este absorbită de ulei.

(Institutul politehnic, București, 1968)

6.41. La bornele unui motor electric se aplică o tensiune de 110 V. Motorul acționează o pompă care ridică apa dintr-un puț pe o înălțime de 7,5 m, cu un debit de 56 litri pe minut. Se cer: a) puterea utilă dezvoltată de pompă; b) puterea motorului, dacă 10% din energia furnizată pompei se pierde; c) rezistența internă și tensiunea contraelectromotoare a motorului, intensitatea curentului prin acesta fiind 0,8 A; d) energia electrică pierdută sub formă de căldură în bobinajul motorului în 5 minute; e) valoarea acestei energii dacă rotorul ar fi blocat accidental; f) randamentul instalației.

(Academia de studii economice, 1971)

6.42. Un miliampermetru, a cărui rezistență R este egală cu 100 Ω, este montat într-un circuit electric. Acul său deviază cu 100 de diviziuni cînd este parcurs de un curent de 10 mA și se poate admite că deviația este proporțională cu intensitatea curentului ce trece prin aparat. Se leagă în derivație, la bornele sale, un rezistor de rezistență r, astfel încît acul să devieze cu 100 de diviziuni cînd intensitatea curentului din circuitul principal este legată cu 1 A.

1) Se cere rezistența r care șuntează aparatul.

2) Se leagă în paralel între două puncte A și B din circuitul principal, de o parte un rezistor cu rezistența $r_1 = 20\ \Omega$, și, de altă parte,

un motor cu rezistența $r_2 = 4\ \Omega$ și tensiunea contraelectromotoare de 12 V. Se cere schema montajului. a) Motorul fiind blocat, deviația acului miliampermetrului, șuntat cu rezistorul r, este egală cu 200 diviziuni. Să se calculeze intensitățile curenților care trec prin r_1 și prin motor. b) Cînd motorul funcționează normal, diferența de potențial între punctele A și B este egală cu 20 V. Care este în acest caz deviația acului aparatului șuntat?

(Academia de studii economice, 1971)

6.43. Se dă schema de tip punte din figură în care sînt cunoscute: rezistența $R_1 = 2\ \Omega$, rezistența din vasul calorimetric $R_2 = 4\ \Omega$, rezistența solenoidului $R_3 = 2\Omega$. Se consideră că puntea se află la echilibru (galvanometrul G nu indică trecerea curentului). a) Să se calculeze rezistența R_4 a băii electrolitice. b) Considerînd că în baia electrolitică se află sulfat de nichel, avînd echivalentul electrochimic $k = 0{,}3$ mg/C, să se calculeze intensitatea I_4 a curentului care o străbate, dacă la catod se depun $m = 2{,}7$ g de nichel în $t = 30$ minute. c) Să se calculeze inducția magnetică B din interiorul solenoidului (fără miez feromagnetic), știind că este bobinat într-un singur strat, spiră lîngă spiră, cu sîrmă de diametru $d = 1$ mm. d) În vasul calorimetric se află apă cu temperatura inițială $\theta_0 = 10°C$, care ajunge la fierbere în $t = 30$ min. Știind că din căldura degajată de rezistorul R_2 apa reține 60%, iar 20% se transmite mediului exterior, să se calculeze capacitatea calorică a vasului calorimetric cu accesoriile sale. e) Să se calculeze cît la sută din masa de aer conținută inițial în vasul calorimetric iese din acesta prin orificiile capacului în timpul încălzirii apei pînă la fierbere.

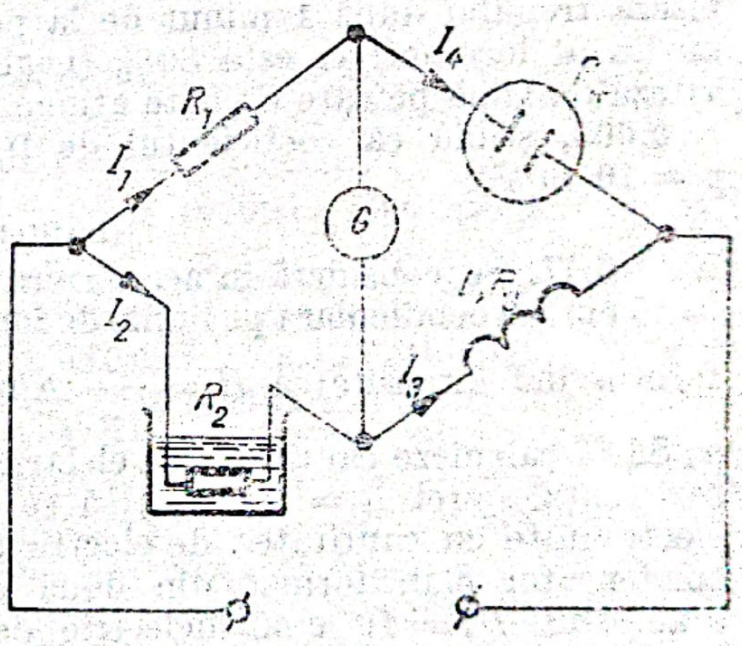


Fig. 6.43.

(Facultatea de fizică, București, 1970)

6.44. Un tramvai cu masa $m = 6$ tone se mișcă rectiliniu și uniform, pe un drum orizontal, cu viteza $v = 36$ km/h. Să se calculeze: a) timpul în care străbate distanța de 1 km; b) puterea motorului tramvaiului cunoscînd coeficientul de frecare $\mu = 0{,}01$ (se dă

Scanned with OKEN Scanner

$g = 10$ m/s^2); c) intensitatea curentului care alimentează motorul tramvaiului ştiind că este conectat la o reţea electrică cu tensiunea $U = 500$ V.

(Universitatea din Braşov, subingineri, 1972)

6.45. O macara, acţionată de un motor electric, ridică uniform un corp de masă $m = 10$ tone la înălţimea $h = 8$ m în timpul $t = 80$ s. Să se calculeze : a) lucrul mecanic util şi puterea utilă dezvoltate; b) intensitatea curentului electric de alimentare cunoscînd că motorul consumă o putere $P_c = 12$ kW sub tensiunea $U = 500$ V; c) randamentul motorului; d) pierderea de putere prin efect Joule în rotor, ştiind că rezistenţa acestuia este $r = 3\ \Omega$. Se dă $g = 10$ m/s^2.

(Universitatea, din Braşov, subingineri, 1972)

6.46. O garnitură este compusă dintr-o locomotivă cu masa $m_1 = 100$ t şi 20 vagoane cu masa $m_2 = 20$ t fiecare. Locomotiva este acţionată de 2 motoare electrice alimentate la tensiunea de 6 000 V, cu intensitatea de curent $I = 250$ A (fiecare). a) Care va fi viteza trenului după 1 minut de la pornire, ştiind că randamentul mediu al locomotivei este 80% (neglijînd frecările)? b) Care este viteza maximă pe care o poate atinge trenul urcînd o pantă cu tg $\alpha = 0{,}005$, ştiind că coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}007$? Se ia $g = 10$ m/s^2.

(Institutul de petrol gaze şi geologie, 1972)

6.47. Se consideră în aer o spiră circulară cu diametrul $D_1 = 20$ cm perpendiculară pe liniile de forţă ale unui cîmp magnetic uniform avînd intensitatea $H = \frac{10^2}{\pi}$ A/m. Se roteşte spira cu 90°.

a) Să se calculeze cantitatea de electricitate indusă în spiră cunoscînd rezistenţa spirei $R = 2\ \Omega$; b) să se compare această cantitate de electricitate cu cantitatea de electricitate de pe fiecare placă a unui condensator plan format din două discuri circulare metalice cu diametrul $D_2 = 10$ cm, dielectric de sticlă $\varepsilon_r = 5$, iar cîmpul dintre armături $E = 20\,000$ V/m. Se dau :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{H/m}; \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}\ \text{F/m}.$$

(Universitatea din Braşov, 1972)

6.48. Se dă circuitul electric din figură aşezat într-un cîmp magnetic uniform de inducţie $B = 0{,}6$ T, perpendicular pe planul circuitului, sensul liniilor de cîmp fiind de la observator spre planul hîrtiei. Conductoarele AB şi CD au rezistenţe neglijabile, conductorul MN are rezistenţa egală cu 0,1 ohmi, iar rezistorul r are rezistenţa $r = 0{,}1\ \Omega$. Conductorul MN, de lungime $l = 1$ m, alunecă fără

Scanned with OKEN Scanner

frecare pe cele două conductoare neizolate AB şi CD cu viteza uniformă $v = 10$ m/s (sensul vitezei fiind de la A la B). Se cer : a) tensiunea electromotoare indusă în circuit (valoarea şi sensul); b) curentul electric din circuit; c) forţa de reacţiune a cîmpului magnetic care se exercită asupra conductorului MN ; d) puterea mecanică

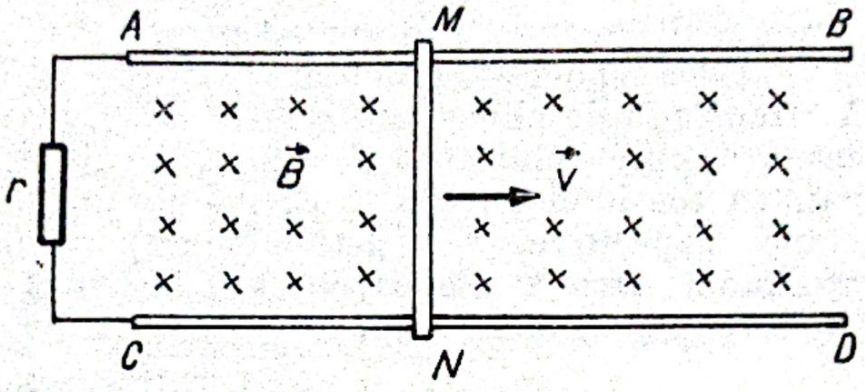


Fig. 6.48.

necesară pentru deplasarea conductorului MN; e) Să se arate că puterea mecanică necesară pentru a deplasa conductorul MN este egală cu puterea disipată în circuitul electric.

(Institutul politehnic, Bucureşti, 1972)

6.49. Un conductor vertical cu un capăt pus la pămînt (antenă) are lungimea $l = 30$ m şi capacitatea proprie $C = 100$ pF. a) Să se calculeze inductanţa proprie a antenei. b) Sub acţiunea unei descărcări electrice atmosferice, antena este străbătută de un curent constant cu intensitatea $I = 100$ A. Cunoscînd rezistenţa $R = 1\ \Omega$ a antenei şi capacitatea sa calorică $K = 120$ J/grd, să se calculeze timpul în care temperatura antenei creşte cu $\Delta\theta = 100°C$. c) cu cît variază lungimea de undă proprie a antenei datorită încălzirii precedente? Se cunoaşte coeficientul de dilatare liniară $\alpha = 10^{-5}\,\text{grd}^{-1}$. d) Să se calculeze intensitatea cîmpului electric uniform din conductor în timpul descărcării electrice. e) La ce distanţă r de conductor şi spre ce punct cardinal cîmpul magnetic creat de curentul ce trece prin antenă în timpul descărcării anulează componenta orizontală a cîmpului magnetic terestru, care are valoarea $H_0 = 16$ A/m?

(Facultatea de fizică, Bucureşti, 1970)

6.50. Un electromotor de curent alternativ conectat la o reţea cu tensiunea $U = 220$ V şi frecvenţa $\nu = 50$ Hz are reactanţa inductivă $X_L = 4\Omega$ şi rezistenţa $R = 3\Omega$. Să se determine: a) impedanţa circuitului; b) intensitatea curentului din circuit; c) puterea consumată de electromotor; d) cu cît va creşte puterea

Scanned with OKEN Scanner

electromotorului dacă se conectează în serie și un condensator cu capacitatea $C = \frac{1}{4\pi} \cdot 10^{-2}$ F, presupunînd că reactanța și rezistența sa rămîn aceleași.

(Universitatea din Brașov, subingineri, 1972)

6.51. Un circuit de curent alternativ este alcătuit dintr-un rezistor, o bobină și un condensator montate în paralel. Știind că valoarea efectivă a tensiunii de alimentare este $U = 40$ V, valoarea efectivă a intensității curentului total $I = 2$ A, iar intensitatea este defazată înaintea tensiunii cu $\pi/6$ și că reactanța inductivă este dublul reactanței capacitive, să se determine: a) valoarea rezistenței, reactanței inductive și a celei capacitive; b) costul energiei consumate de circuit în timp de 250 ore, dacă 1 kWh valorează 0,30 lei.

(Universitatea din Brașov, 1972)

6.52. Un circuit de curent alternativ cu frecvența de 50 Hz conține un rezistor de 50 Ω legat în serie cu o bobină. Defazajul dintre curent și tensiune este 45°. Se cer: a) inductanța bobinei; b) capacitatea condensatorului ce trebuie legat în serie pentru a anula defazajul; c) capacitatea altui condensator legat în serie cu rezistența dată și o altă bobină astfel încît defazajul la bornele circuitului să fie $\varphi_1 = -30°$, știind că defazajul este $\varphi_2 = 30°$ cînd circuitul cuprinde numai rezistența și bobina.

(Universitatea din Brașov, 1972)

6.53. O bobină de inductanță $L = \frac{0{,}02}{2\pi}$ H și rezistență $R = 225$ Ω este conectată în serie cu un condensator plan de capacitate $C = \frac{0{,}08}{2\pi}$ μF la o tensiune continuă $U_c = 240$ V. Să se calculeze: a) permitivitatea dielectricului condensatorului știind că aria armăturilor este $S = 0{,}016$ m², iar distanța dintre armături este $d = 0{,}11$ mm; b) sarcina în coulombi cu care se încarcă acest condensator; c) pulsația și frecvența proprie a circuitului; d) dacă se înlocuiește tensiunea continuă cu o tensiune alternativă $U = U_0 \sin 2\pi\nu t$, cu $U_0 = 4{,}5$V și frecvența $\nu = 20\,000$ Hz, să se calculeze valoarea efectivă a curentului și defazajul față de tensiune.

(Institutul politehnic, București, subingineri. 1972)

6.54.* Un circuit electric, alimentat de o tensiune alternativă, cuprinde o bobină M cu miez magnetic, un condensator plan P și un rezistor K legate în serie. Bobina are lungimea $l = 30$ cm și este

Scanned with OKEN Scanner

constituită din $N = 1\,000$ spire cu raza $r = 2$ cm. Rezistorul are rezistența activă $R_1 = 10\ \Omega$. Tensiunea efectivă la bornele rezistorului K are cea mai mare valoare, egală cu $U_1 = 0{,}6$ V, pentru o frecvență $f_1 = 35$ kHz a generatorului care alimentează circuitul și o distanță d_1 între armăturile condensatorului. Pentru aceeași distanță d_1, dar pentru o frecvență $f_2 = 50$ kHz, tensiunea efectivă la bornele rezistorului scade la $U_2 = 0{,}002$ V. Dacă în cazul frecvenței f_2, distanța dintre armăturile condensatorului se mărește cu $\Delta d = 1{,}8$ mm, tensiunea efectivă la bornele rezistorului atinge din nou valoarea $U_3 = U_1 = 0{,}6$ V. Dielectricul dintre armăturile condensatorului este aerul. Să se determine: a) valorile C_1 și C_2 ale capacității condensatorului în cele două poziții ale armăturilor, aria suprafeței fiecărei armături fiind $A = 400$ cm^2, iar permitivitatea aerului, fiind: $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$ F/m; b) distanța d_1 dintre armăturile condensatorului; c) inductanța L a bobinei; d) rezistența echivalentă R_2 a întregului circuit (inclusiv rezistența activă a bobinei); e) permeabilitatea relativă μ_r a miezului magnetic al bobinei, cunoscându-se permeabilitatea vidului $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

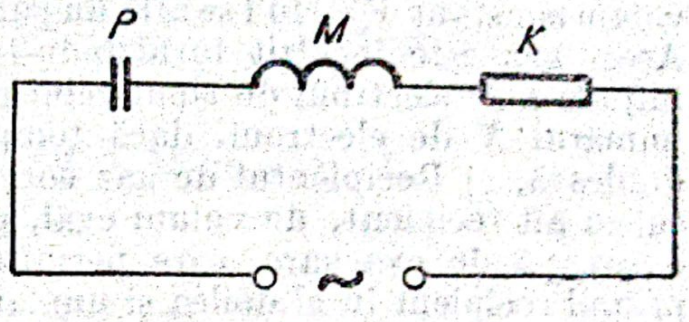


Fig. 6.54.

(Institutul politehnic, București, 1971)

6.55. Între plăcile unui condensator plan se găsește o substanță cu lucrul de ieșire $W_e = 2{,}5$ eV, pe care cade un fascicul de lumină monocromatică. Unul din fotoelectroni este emis cu viteza v_0 în planul median al condensatorului. Știind că distanța dintre plăci este de 5 cm și tensiunea aplicată condensatorului este de 1 V, să se calculeze: a) lungimea de undă a luminii pentru ca, pe distanța de 5 cm, electronul să fie deviat cu 1 cm (se neglijează efectul gravitației); b) timpul scurs între momentul emisiei fotoelectronului și cel al ciocnirii lui cu una din plăcile condensatorului. Se dau: sarcina electronului $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$C, constanta lui Planck $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s; masa electronului $m = 10^{-30}$ kg.

(Facultatea de fizică, București, 1969)

6.56.* Un electron pătrunde într-un condensator plan de lungime $l = 5$ cm sub un unghi $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ față de direcția cîmpului electric

dintre plăci și iese sub unghiul $\beta = \frac{5\pi}{6}$. a) Să se calculeze energia cinetică inițială a electronului dacă intensitatea cîmpului electric uniform dintre plăci este $E = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 10^6$ V/m. b) Într-un recipient de volum constant $V = 40$ l se află un gaz la presiunea $p_0 = 3 \cdot 10^5$ N/m². Acest gaz este încălzit furnizîndu-i-se o energie egală cu energia inițială a N electroni de tipul celui considerat la punctul a. Se cere numărul N de electroni, dacă temperatura absolută a gazului se dublează. c) Recipientul de gaz considerat mai sus este în legătură cu un alt recipient, de volum egal, printr-un tub scurt prevăzut cu o supapă de evacuare, care permite trecerea gazului numai din primul recipient în al doilea și numai dacă diferența presiunilor este $\Delta p = 7 \cdot 10^5$ N/m². Presupunînd că în urma procesului descris la punctul b temperatura finală a gazului este $t_2 = 27°C$ și că cel de-al doilea recipient este inițial vidat, să se calculeze presiunea în acesta după încălzirea ambelor recipiente pînă la temperatura $t_3 = 127°C$. Se dau: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$C, $C_v = 20{,}75 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{grd}}$, $R = 8{,}3 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{grd}}$.

(Facultatea de fizică, București, 1971)

Scanned with OKEN Scanner

REZOLVĂRI ȘI RĂSPUNSURI

2.1.1. $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_0^2} = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{0{,}53 \cdot 10^{-10}} \right)^2 \approx 8{,}2 \cdot 10^{-8}$ N.

2.1.2. $F_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{d^2}, F_a k = \frac{m^2}{d^2}; \frac{F_r}{F_a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 k} \frac{e^2}{m^2} \approx 1{,}248 \cdot 10^{36}$.

2.1.3. Bila de masă m conține $\frac{m}{A}$ atomi gram, adică $\frac{m}{A} N_A$ atomi. Fiecare atom are Z electroni, astfel încît sarcina totală a electronilor din bilă este $Q = \frac{m}{A} N_A Ze \approx 45 \cdot 10^3$C. Forța de atracție între bile încărcate cu $10^{-3}\ Q$, una pozitiv, cealaltă negativ, este: $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{10^{-3} Q}{d} \right)^2 \approx 18{,}2 \cdot 10^{12}$ N. Experimentul este, evident, imposibil, potențialul la care ar ajunge bilele și forța de atracție dintre acestea avînd valori mult prea mari.

2.1.4. $F = \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{d^2}$, $G = mg$; $F = G \Rightarrow q = d \sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg} =$

$= 3{,}3 \cdot 10^{-5}$C.

2.1.5. $F_{aer} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{d_1^2}$, $F_{ulei} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r} \cdot \frac{q_1 q_2}{d_2^2}$; $F_{aer} = F_{ulei} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varepsilon_r = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 = 4{,}41.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.1.6. $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{d^2}$, $G = mg$; $F = G \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $d = 2l \sin\frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow q = 2l \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \approx 9{,}34 \cdot 10^{-8}\text{C}.$$

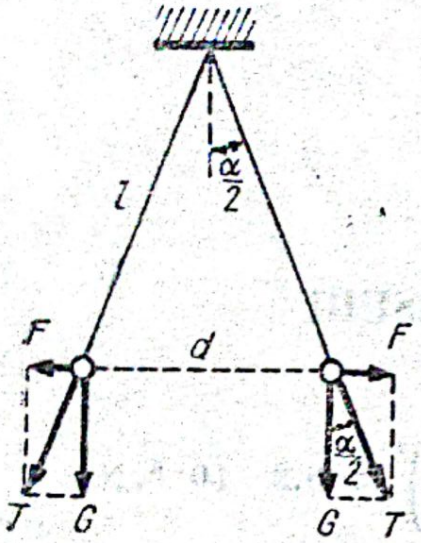


Fig. 2.1.6. R.

2.1.7. În acest caz se modifică, pe de o parte, forţa de respingere între cele două sfere $F' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{q^2}{\left(2l \sin\frac{\beta}{2}\right)^2}$, iar, pe de altă parte se adaugă forţa arhimedică $F_A = \rho_0 V_0 = \frac{\rho_0}{\rho} mg$, acţionînd în sens contrar greutăţii $G = mg$. Condiţia de echilibru a sferelor devine : $F' = (G - F_A) \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, de unde se obţine

$$\sin^2\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{q^2}{4l^2\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)mg}.$$

Pentru cazul sistemului plasat în vid

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{4l^2 mg},$$

astfel încît

$$\sin^2\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\varepsilon_r\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{16}$$

sau

$$\frac{\operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}} = \frac{5}{16},$$

ecuaţie cu o singură soluţie reală $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \approx 0{,}8$,

adică

$$\frac{\beta}{2} \approx 38°40'; \quad \beta = 77°20'.$$

2.1.8. Din rezolvarea problemei anterioare

$$\varepsilon_r = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{\rho_0}{\rho}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4{,}6.$$

2.1.9. Cu notațiile de la problema 2.1.7, $\alpha = \beta$, de unde

$$\varepsilon_r\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right) = 1, \text{ deci}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1} = 2.$$

2.1.10. Interacțiunea dintre corpul punctual avînd sarcina q și peretele conductor încărcat prin „influență" este echivalentă cu interacțiunea dintre corpul punctual dat și „imaginea" sa electrostatică, reprezentată de un corp punctual fictiv, avînd sarcina $(-q)$, plasat simetric cu corpul real față de peretele conductor. În ambele cazuri cîmpul electrostatic are aceleași valori în semispațiul drept, în care este plasat corpul real. Ca la problema 2.1.7, se obține

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{4l^2mg} = \frac{1}{2},$$

ecuație avînd singura soluție reală $\frac{\alpha}{2} = 45°$. Rezultă:

a) $x = l\sin\frac{\alpha}{2} = 21{,}2$ cm; b) $T = \frac{G}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 5{,}55\cdot10^{-4}$N.

2.1.11. a) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{l^2} = K(l-l_0) \Rightarrow l = 15$ cm;

b) $F = K(l-l_0) = 6{,}25$ N.

Scanned with OKEN Scanner

2.1.12. Fiecare corp trebuie să se afle într-un punct în care cîmpul rezultant dat de celelalte două corpuri este nul sau, echiva-

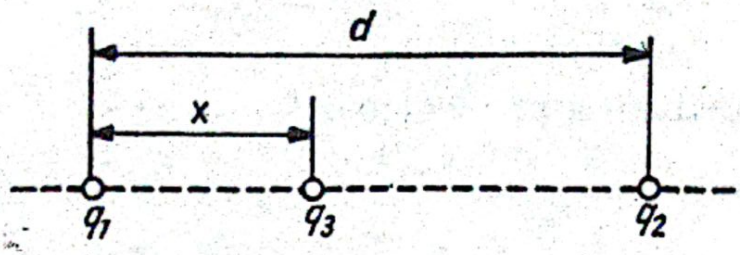


Fig. 2.1.12. R.

lent, în care cîmpurile produse de celelalte două corpuri sînt egale şi de sens contrar. Rezultă $x = 2$ cm; $q_3 = -0{,}444\mu C$.

2.1.13. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{G} = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{g} \cdot 3 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \cos\alpha \approx 25$ g.

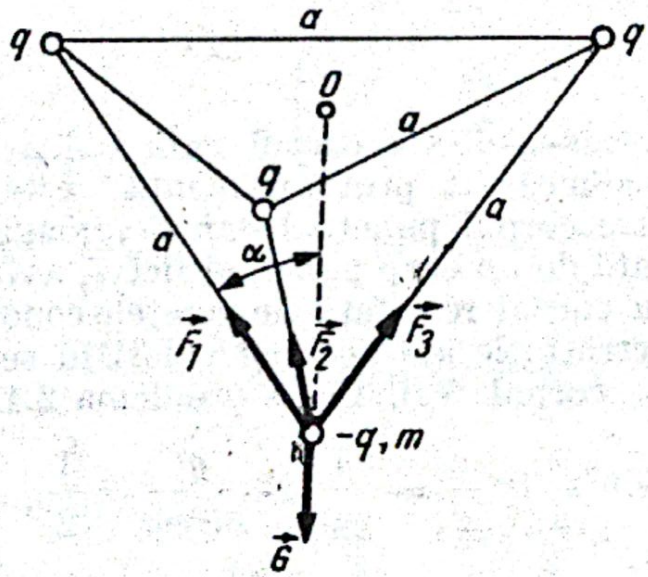


Fig 2.1.13. R.

2.1.14. S-a ales originea sistemului de referinţă la mijlocul distanţei dintre cele două corpuri punctuale şi sensul pozitiv de la primul spre al doilea corp. Cu linie plină s-a reprezentat cazul $q_1, q_2 > 0$, cu linie întreruptă $q_1 > 0$, $q_2 < 0$.

2.1.15. Sînt $C_4^2 = 6$ cazuri distincte de repartizare a sarcinilor în vîrfurile pătratului. În două dintre ele, cînd în vîrfurile diametral opuse sînt sarcini de acelaşi semn, cîmpul în centru este nul. În celelalte patru cazuri, intensităţile cîmpului electric în centru au

Scanned with OKEN Scanner

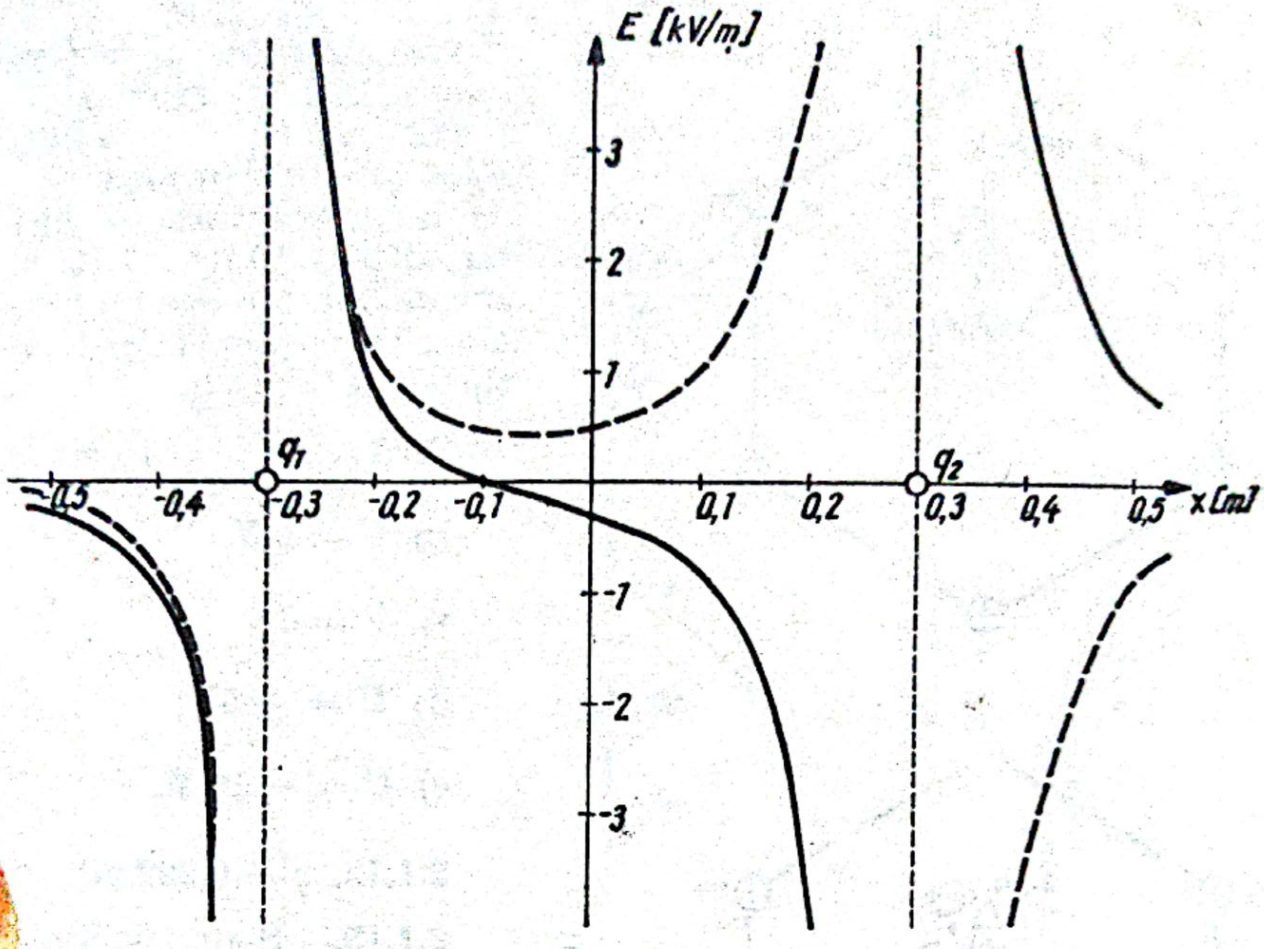


Fig. 2.1.14. R.

același modul $E = 5{,}09 \cdot 10^6$ V/m, și sînt orientate paralel cu laturile care unesc vîrfurile în care sînt sarcini diferite, cu sensul de la sarcina pozitivă spre cea negativă. În fig. 2.1.15 R este reprezentat un astfel de caz.

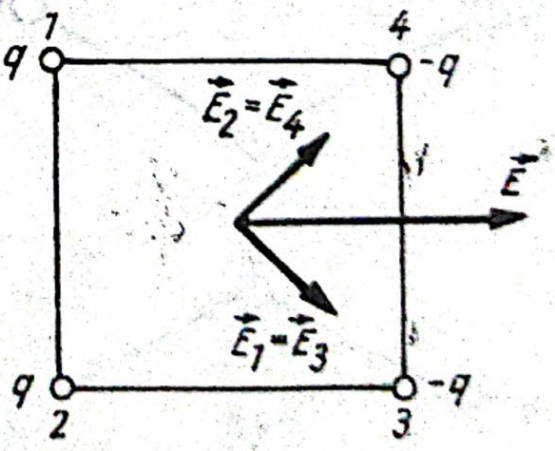


Fig. 2.1.15. R.

2.1.16. Sînt $C_6^3 = 20$ cazuri distincte de repartizare a sarcinilor în vîrfurile hexagonului. În două cazuri, cînd sarcinile de același semn sînt dispuse în vîrfurile unor triunghiuri echilaterale, cîmpul în centru este nul. În alte 12 cazuri, cînd două sarcini de același semn sînt plasate în vîrfuri diametral opuse, intensitățile cîmpului electric în centru au modulul $E_b = 3{,}6 \cdot 10^5$ V/m și șase orientări diferite. În ultimele șase cazuri, în care trei sarcini de același semn sînt plasate în trei

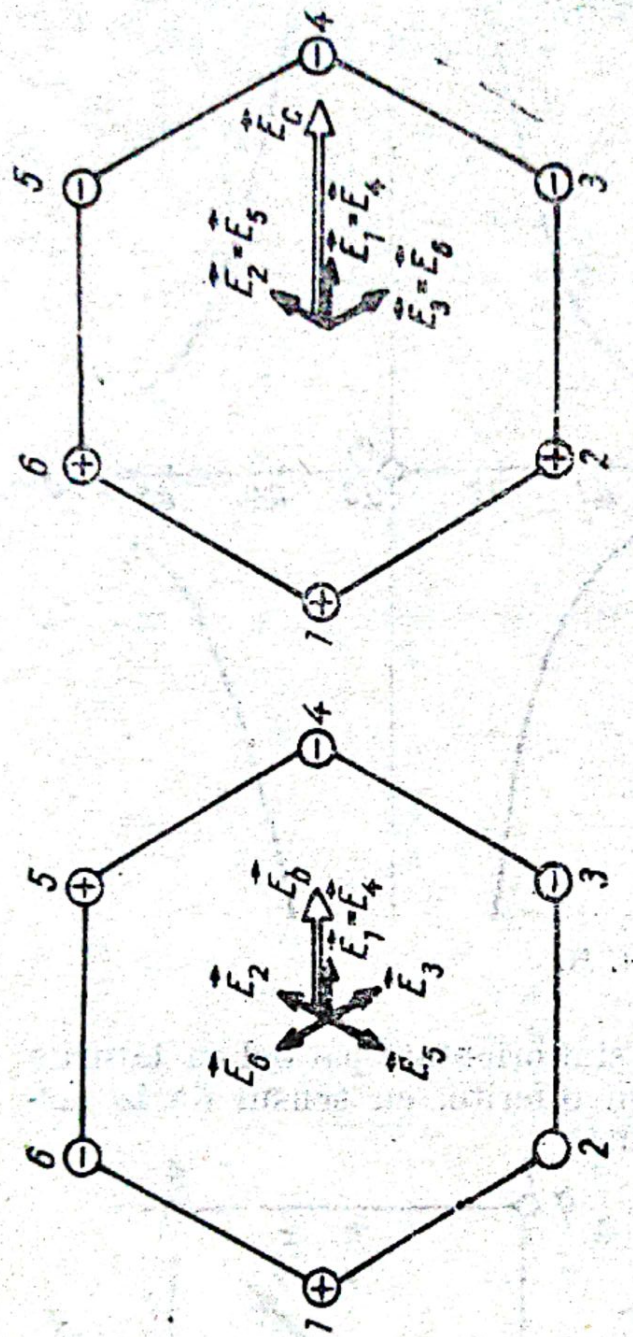


Fig. 2.1.16. R.

vîrfuri alăturate, se obţin intensităţi ale cîmpului electric egale în modul $E_c = 7{,}2 \cdot 10^5$ V/m şi avînd, de asemenea, şase orientări diferite. În fig. 2.1.16 R sînt prezentate cîte un caz din fiecare din cele trei tipuri de situaţii.

2.1.17. a) $U = 10$ V;

b) $U = 5$ V;

c) $U = 0$;

d) $U = -5$V;

e) $U = -10$ V.

2.1.18. $q = 0{,}222$ nC.

2.1.19. S-au utilizat convenţiile de reprezentare din fig. 2.1.14 R.

2.1.20. În total sînt 24 de posibilităţi de plasare a corpurilor încărcate şi de alegere a punctelor A şi B, pentru care rezultă trei tensiuni U_{AB} diferite. Cînd corpurile sînt plasate în vîrfuri opuse ale pătratului $U_{AB} = 0$, cînd sînt plasate în vîrfuri alăturate $U_{AB} = \pm 14{,}65$ V, semnul fiind determinat de modul de alegere a punctelor A şi B.

2.2.1. $C = \dfrac{\varepsilon_0 \cdot \pi R^2}{d} =$

$= 10^{-11}$ F $= 10$ pF.

Scanned with OKEN Scanner

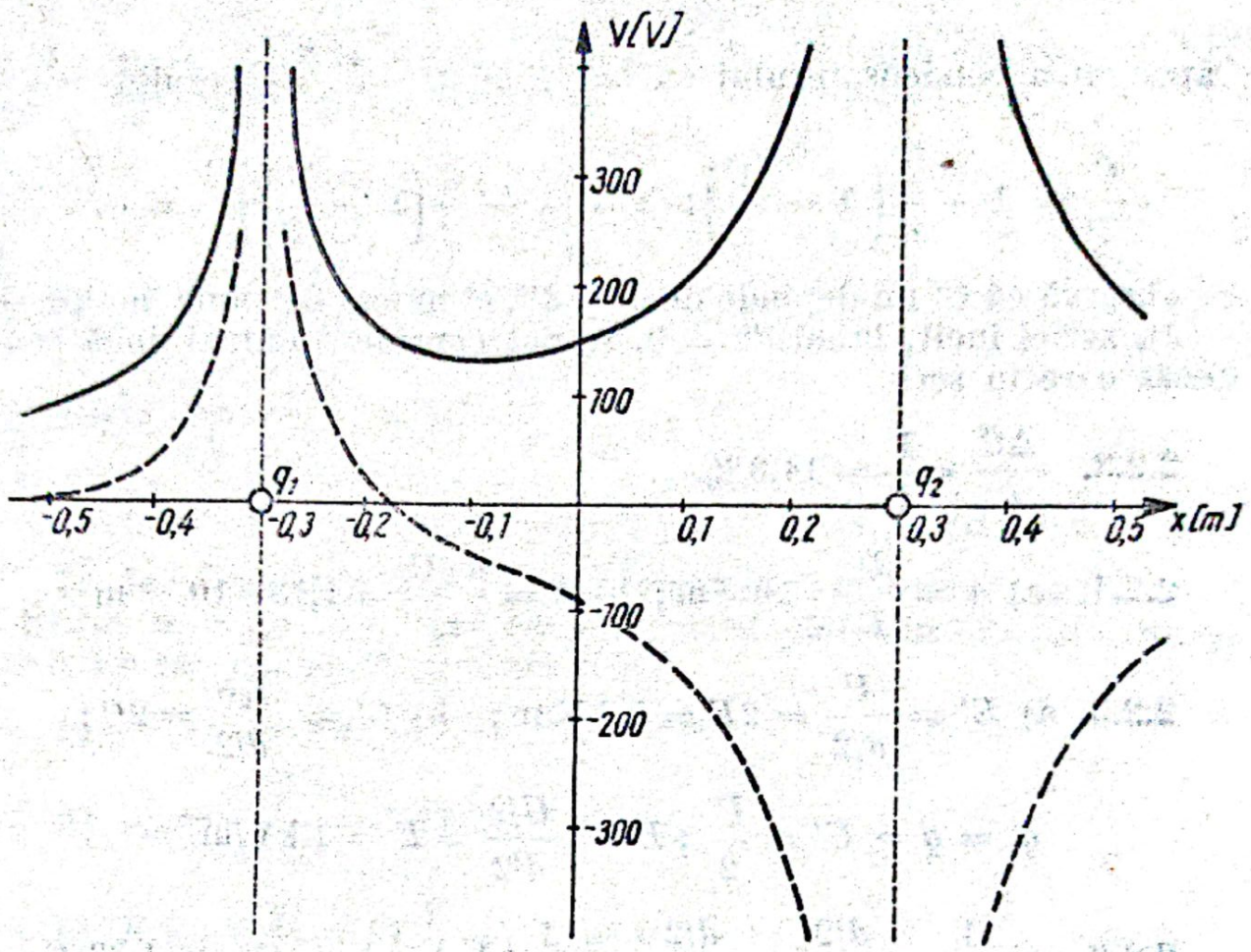


Fig. 2.1.19. R.

2.2.2. Condensatorul cu placa de dielectric între armături (fig. 2.2.2 R, a) poate fi echivalat cu trei condensatoare în serie (fig. 2.2.2 R, b), două cu aer C'_a și C''_a și unul cu dielectric C_d, astfel încît

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C'_a} + \frac{1}{C_d} + \frac{1}{C''_a} = \frac{d'}{\varepsilon_0 S} + \frac{\delta}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} + \frac{d''}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\left(d - \delta + \frac{\delta}{\varepsilon_r}\right).$$

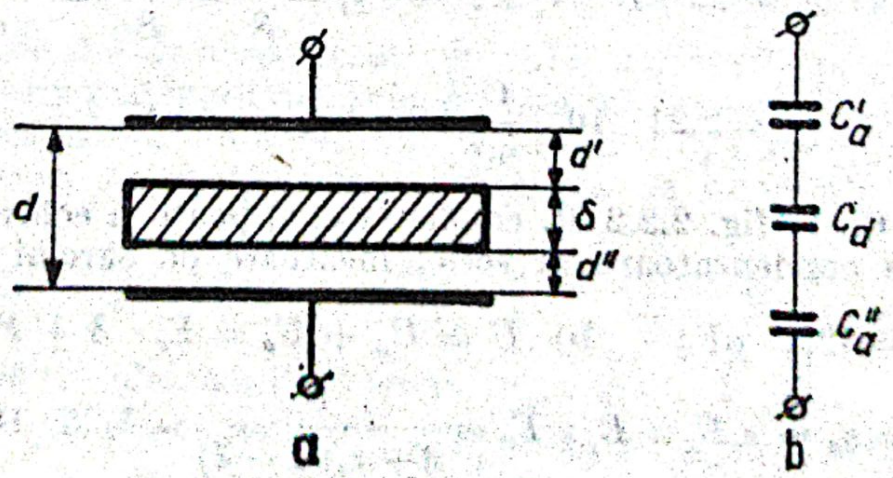


Fig. 2.2.2. R.

Scanned with OKEN Scanner

Capacitatea condensatorului cu aer fiind $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$, rezultă

$$\frac{C}{C'} = 1 - \frac{\delta}{d}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right); \quad \varepsilon_r = \left[1 - \frac{d}{\delta}\left(1 - \frac{C}{C'}\right)\right]^{-1} = 3.$$

Se observă că C' nu depinde de d' și d'', ci numai de suma lor $(d - \delta)$, astfel încît, luînd $d'' = 0$, se pot considera numai două condensatoare în serie.

2.2.3. $\frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{7} = 14{,}3\,\%$.

2.2.4. a) $d = \frac{U}{E} = 10^{-2}\,\text{m}$; b) $S = \frac{d \cdot C}{\varepsilon_0} = 1{,}13 \cdot 10^{-2}\,\text{m}^2$.

2.2.5. a) $E' = \frac{U}{d/2} = 2E = 2\ \text{kV/m}$; b) $C' = \frac{\varepsilon_0 S}{d/2} = 2C$;

$$q' = q \Rightarrow U' = \frac{U}{2}\ ; E' = \frac{U/2}{d/2} = E = 1\ \text{kV/m}.$$

2.2.6. a) $\frac{1}{C_a} = \frac{d/2}{\varepsilon_0 S} + \frac{d/2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{1}{2C}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \Rightarrow C_a = 1{,}33\ \text{C} = 13{,}3\ \text{pF}$;

b) $C_b = \frac{\varepsilon_0 S/2}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r\ S/2}{d} = \frac{C}{2}(1 + \varepsilon_r) = 1{,}5\,\text{C} = 15\,\text{pF}$.

2.2.7. a) $E = 2{,}5 \cdot 10^4\ \text{V/m}$; b) $\rho_s = \frac{q}{S} = \frac{CU}{S} = \frac{\varepsilon_0 U}{d} = \varepsilon_0 E = 2{,}21 \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$; c) $U_{max} = 6\ \text{kV}$.

2.2.8. Ca în fig. 2.2.2 R, condensatorul poate fi echivalat cu un sistem de condensatoare în serie, încărcate cu sarcini egale.

a) $C = 42{,}4\ \text{pF}$; b) $U = U_d + U_a = E_d \cdot \delta + E_a\ (d - \delta)$;

$$q_d = q_a \Rightarrow \varepsilon_r E_d = E_a\ ;\ E_d = \frac{U}{\delta + \varepsilon_r\ (d - \delta)} = 1{,}33 \cdot 10^4\ \text{V/m},$$

$$E_a = 8 \cdot 10^4\ \text{V/m};$$

Scanned with OKEN Scanner

c) $U_{max} = 3{,}75$ kV, stratul de aer se străpunge la o tensiune mai joasă decît placa de porțelan.

2.2.9. $\dfrac{C'}{C} = \dfrac{1}{1-k} = 1{,}25.$

2.2.10. $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4{,}67 \cdot 10^{-10}\,\text{F}.$

2.2.11. $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{R_2^2}{R_1^2} \approx 1{,}1.$

2.2.12. a) $C = 4\pi\varepsilon_0 R = 7{,}11 \cdot 10^{-4}\,\text{F}$; b) $R_1 \approx \sqrt{d \cdot R} = 80$ m.

2.2.13. Cîmpul electric în exteriorul sferei uniform încărcate este identic cu cel produs de un corp punctual plasat în centrul sferei și avînd o sarcină egală cu a acesteia.

a) $q = CV = 4\pi\varepsilon_0 RV = 2{,}22 \cdot 10^{-10}\,\text{C}$;

b) $\rho_s = \dfrac{q}{4\pi R^2} \approx 1{,}77 \cdot 10^{-7}\,\text{C/m}^2$;

c) $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \dfrac{V}{R} = 2 \cdot 10^4\,\text{V/m}$;

d) $V_1 = \dfrac{R}{R_1} \cdot V = 2\,\text{V}, \quad E_1 = \dfrac{R^2}{R_1^2} E = 2\,\text{V/m}$;

e) $V_{max} = RE_{max} = 30$ kV.

2.3.1. $L_{12} = \int_1^2 F\,dr = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} \dfrac{dr}{r^2} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right).$

Cînd sarcinile sînt de același semn, lucrul mecanic este pozitiv, adică sistemul efectuează lucru mecanic, energia potențială de interacțiune electrostatică scade. În cazul contrar, $q_1 q_2 < 0$, sistemul primește lucru mecanic, $L_{12} < 0$, energia potențială de interacțiune crește.

2.3.2. $L_{12} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \cdot \dfrac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = \sqrt{F_1 \cdot F_2} \cdot l = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{J}.$

2.3.3. Se calculează întîi potențialele: $V_D = -V_C = 2{,}637 \cdot 10^4\,\text{V}$; $V_Q = -V_N = 9{,}95 \cdot 10^4\,\text{V}$; $V_M = V_P = 0$; a) $L_{DC} = q\,(V_D - V_C) = 5{,}27 \cdot 10^{-5}\,\text{J}$; b) $L_{QN} = 19{,}9 \cdot 10^{-5}\,\text{J}$; c) $L_{MP} = 0$;

Scanned with OKEN Scanner

d) $L_{QM} = 9{,}95 \cdot 10^{-5}$ J; e) $L_{NP} = -9{,}95 \cdot 10^{-5}$ J;

f) $L_{DN} = 12{,}58 \cdot 10^{-5}$ J.

2.3.4. Energia este egală cu lucrul mecanic cheltuit pentru a aduce corpurile de la infinit în vîrfurile triunghiului echilateral. Energia fiind o mărime de stare, rezultatul este acelaşi pentru orice proces care aduce sistemul în starea considerată. Vom presupune că corpurile se aduc succesiv în vîrfurile A, B, C ale triunghiului. Plasarea corpului *1* în A nu necesită lucru mecanic, căci celelalte două corpuri fiind la distanţă mare nu acţionează asupra sa. Corpul al doilea trebuie deplasat în cîmpul electric al primului, de la infinit în B, lucrul mecanic cheltuit fiind $q_2 V_1(B)$. În sfîrşit, al treilea corp se deplasează în cîmpul primelor două, astfel încît lucrul mecanic necesar este $q_3\,[V_1(C) + V_2(C)]$. Energia rezultă deci

$$W = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{AB}} + \frac{q_2 q_3}{r_{BC}} + \frac{q_3 q_1}{r_{CA}}\right) = \frac{3\,q^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,l},$$

unde s-au notat r_{AB}, r_{BC}, r_{CA} distanţele între punctele A, B şi C. Pentru datele numerice, se obţine $W = 0{,}27$ J.

2.3.5. Energia condensatorului este egală cu lucrul mecanic cheltuit pentru încărcarea sa. Presupunem că condensatorul are într-o stare intermediară sarcina q şi tensiunea $u = \frac{q}{C}$. Pentru a transporta în plus o sarcină $\mathrm{d}q$ de pe armătura negativă pe cea pozitivă se efectuează un lucru mecanic $\mathrm{d}L = \mathrm{d}q \cdot u = \frac{1}{C}\,q\,\mathrm{d}q$. Încărcarea condensatorului de la sarcina iniţială nulă, pînă la sarcina finală Q, necesită un lucru mecanic

$$L = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}.$$

Energia electrică a condensatorului este deci

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2},$$

unde s-a notat cu $U = \frac{Q}{C}$ tensiunea finală a condensatorului.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.6. Aplicăm metoda deplasărilor virtuale. Presupunem că armăturile condensatorului, deconectat de sursă, s-ar apropia lent cu o distanță foarte mică Δd. Ca urmare, capacitatea condensatorului crește de la $C = \frac{\varepsilon S}{d}$ la $C' = \frac{\varepsilon S}{d - \Delta d}$, astfel încît energia electrică scade cu o cantitate

$$W - W' = \frac{Q^2}{2C} - \frac{Q^2}{2C'} = \frac{Q^2}{2}\frac{\Delta d}{\varepsilon S}.$$

Conform principiului conservării energiei, scăderea energiei electrice este egală cu lucrul mecanic $F \cdot \Delta d$ efectuat de forța de atracție F dintre armături. Rezultă

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon S}.$$

2.3.7. Sarcina fiind constantă, condensatorul este un sistem izolat, astfel încît lucrul mecanic primit este egal cu creșterea energiei electrice.

Rezultă

$$L = W' - W = \frac{Q^2}{2C'} - \frac{Q^2}{2C}.$$

Pe de altă parte, $C' = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} = \frac{C}{2}$, astfel încît $L = \frac{Q^2}{2C}$.

2.3.8. a) $L = W' - W = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C'} - \frac{1}{C}\right) = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{d}{\varepsilon_0 S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$;

$$Q = CU = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} U; \quad L = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{2d} U^2 (\varepsilon_r - 1);$$

b) $U' = \frac{Q}{C'} = \frac{C}{C'} U = \varepsilon_r U.$

2.3.9. a) $W = \frac{CU^2}{2}$; $W' = \frac{C' U^2}{2} \Rightarrow \frac{W'}{W} = \frac{C'}{C} = \frac{1}{1 - k_1} = 1{,}25$;

b) $W = \frac{Q^2}{2C}$; $W' = \frac{Q^2}{2C'} \Rightarrow \frac{W'}{W} = \frac{C}{C'} = 1 - k = 0{,}8.$

Scanned with OKEN Scanner

2.3.10. a) Energia electrică a condensatorului după extragerea dielectricului este $W' = W + L$. Notînd cu C' capacitatea condensatorului fără dielectric şi ţinînd seama că sarcina Q a condensatorului este constantă, se poate scrie

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C'} = \frac{Q^2}{2C'} \cdot \frac{2C}{Q^2} = \frac{W'}{W} = 3.$$

b) $U' = \varepsilon_r U = 300\ \text{V}$; c) $C = \frac{2W}{U^2} = 2 \cdot 10^{-8}\text{F}$.

2.4.1. $C_{1,2} = \frac{C_p^2 \pm \sqrt{C_p^2 - 4C_p C_s}}{2}$; $C_1 = 6\ \mu\text{F}$; $C_2 = 3\ \mu\text{F}$.

2.4.2. $C_{min} = 5$ pF (ambele condensatoare la capacitatea minimă şi conectate în serie); $C_{max} = 200$ pF (ambele la maxim şi în paralel).

2.4.3. a) $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = 3\mu\text{F}$;

b) $C = \frac{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} = 4\mu\text{F}$.

2.4.4. Cele două montaje trebuie să fie echivalente pentru orice mod de conectare, în particular cînd se leagă numai bornele *1* şi *2*, lăsînd nelegată borna *3*. Rezultă

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \left(C_{12} + \frac{C_{23} C_{31}}{C_{23} + C_{31}} \right)^{-1} = \frac{C_{23} + C_{31}}{C_{12} C_{23} + C_{23} C_{31} + C_{31} C_{12}}.$$

Relaţii similare se obţin pentru bornele *2*, *3* şi *3*, *1*. Rezolvînd sistemul astfel format, rezultă

$$C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12} C_{31}}{C_{23}} \text{ şi analog } C_2, C_3.$$

2.4.5. Rezolvînd sistemul în C_{12}, C_{23}, C_{31} se obţine

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

şi analog C_{23}, C_{31}.

Scanned with OKEN Scanner

2.4.6. a) $C_e = 2C$; b) $C_e = \frac{6}{5}C$; c) $C_e = \frac{4}{5}C$.

2.4.7. $q_1 = q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot U = 16\mu\,C$;

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = 8\ V; \quad U_2 = U - U_1 = 4\ V.$$

2.4.8. a) $C_e = 1\mu F$; b) $U_1 = 3V$; $U_2 = 2V$;

$U_3 = 1V$; $q_1 = q_2 = q_3 = 6\mu C$.

2.4.9. a) $C_e = 2{,}5\ \mu F$; b) $U_{AB} = 60\ V$.

2.4.10. a) $C_e = 0{,}66\ \mu F$;

b) $U_1 = 6V$; $U_2 = 2V$; $U_3 = U_4 = 1\ V$;

$q_1 = q_2 = 6\mu C$; $q_3 = 2\mu C$; $q_4 = 4\mu C$;

c) $W_1 = 18\mu J$; $W_2 = 6\mu J$; $W_3 = 1\mu J$; $W_4 = 2\mu J$.

2.4.11. $U = 20{,}25\ V$.

2.4.12. a) $Q_1 + Q_2 = q_1 + q_2$;

$$U = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \Rightarrow U = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = 3\ V;$$

$Q_1 = 18\mu C$; $Q_2 = 12\mu C$.

b) $W_i = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} = 55{,}5 \cdot 10^{-6} J$,

$$W_f = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} = 45 \cdot 10^{-6} J.$$

Diferența se transformă în căldură în conductoarele de legătură la trecerea curentului după închiderea întrerupătorului K.

2.4.13. Legarea sferelor printr-un fir conductor este echivalentă cu punerea în paralel a două condensatoare având capacitățile $C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1$ și $C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2$. Calculînd ca la 2.4.12 a, se obțin sarcinile sferelor $q_1 = \frac{2R_1}{R_1 + R_2} q$ și $q_2 = \frac{2R_2}{R_1 + R_2} q$. Forța de respingere în sta-

Scanned with OKEN Scanner

rea inițială este $F_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{d^2}$, iar în starea finală $F_f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{d^2}$, astfel încît raportul lor are valoarea $\frac{F_f}{F_i} = \frac{4R_1R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{8}{9}$.

2.4.14. $U_1 = E_1$; $U_2 = E_1 + E_2$, $U_3 = E_1 + E_2 - E_3$;

$$Q_1 = C_1 U_1, \quad Q_2 = C_2 U_2, \quad Q_3 = C_3 U_3.$$

2.4.15. $q_1 = C_1(E_1 - U_{AB})$, $q_2 = C_2(E_2 - U_{AB})$, $q_1 + q_2 = 0$

$$\Rightarrow U_{AB} = \frac{C_1E_1 + C_2E_2}{C_1 + C_2} = 7{,}2\ \text{V}, \quad q_1 = -2{,}4\mu\text{C}; \quad q_2 = 2{,}4\mu\text{C}.$$

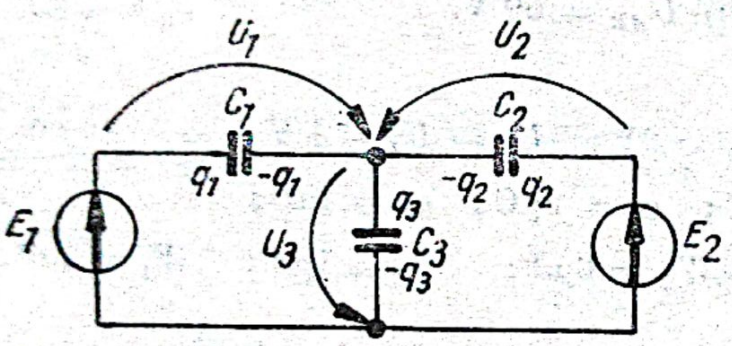


Fig. 2.4.16. R.

2.4.16. Se aleg sensurile de referință ca în fig. 2.4.16 R, astfel încît ecuațiile circuitului sînt

$$-q_1 - q_2 + q_3 = 0,$$

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_3}{C_3} = E_1,$$

$$\frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} = E_2.$$

Rezultă $q_1 = 4\mu\text{C}$, $q_2 = 2\mu\text{C}$, $q_3 = 6\mu\text{C}$;

$$U_1 = 4\text{V}, \quad U_2 = 1\ \text{V}, \quad U_3 = 2\ \text{V}.$$

2.4.17. Cu sensurile de referință din fig. 2.4.17 R, ecuațiile circuitului sînt

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_3}{C_3} = E_1,$$

$$\frac{-q_3}{C_3} + \frac{q_4}{C_4} = E_3,$$

$$\frac{q_2}{C_2} + \frac{q_4}{C_4} = E_2,$$

$$-q_1 - q_2 + q_3 + q_4 = 0.$$

Rezultă : a) $q_1 = 12{,}2\ \mu C$, $q_2 = -7{,}6\ \mu C$,

$q_3 = -3{,}3\ \mu C$, $q_4 = 7{,}9\ \mu C$,

$U_1 = 6{,}1\ V$, $U_2 = -1{,}9\ V$, $U_3 = -1{,}1\ V$, $U_4 = 7{,}9\ V$;

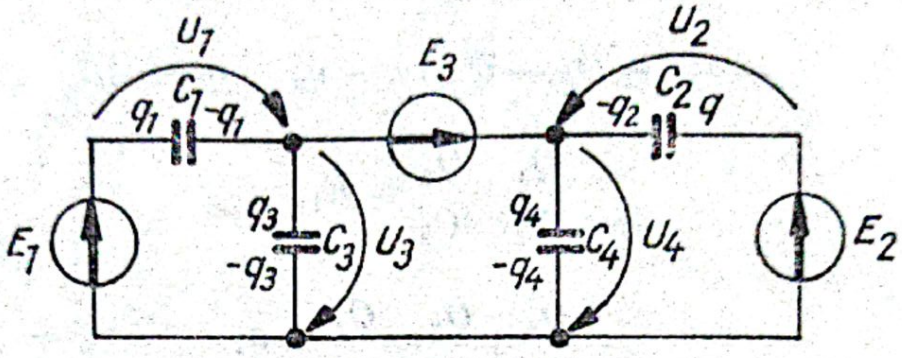


Fig. 2.4.17. R.

b) $U_{ac} = U_1 - E_3 = -2{,}9\ V$, $U_{ad} = E_1 - E_2 = -1\ V$,

$U_{bh} = U_3 = -1{,}1\ V$, $U_{ch} = U_4 = 7{,}9\ V$;

c) $W_1 = \dfrac{q_1 U_1}{2} = 37{,}21\ \mu J$,

$W_2 = 7{,}22\ \mu J$, $W_3 = 1{,}82\ \mu J$, $W_4 = 31{,}26\ \mu J$.

2.4.18. Luînd sensurile de referinţă din fig. 2.4.18 R, ecuaţiile circuitului înainte de închiderea întrerupătorului K sînt:

$$-q_1 + q_2 = 0, \quad \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = E_1,$$

$$q_3 = 0,$$

$$q_4 - q_5 = 0,$$

$$\frac{q_4}{C_4} + \frac{q_5}{C_5} = E_2,$$

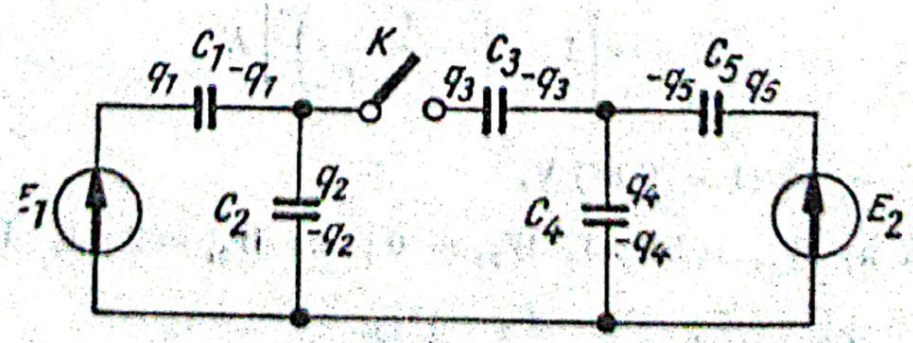


Fig. 2.4.18. R.

cu soluţiile $q_1 = q_2 = 140\ \mu C$, $q_3 = 0$, $q_4 = q_5 = 72\ \mu C$. După închiderea întrerupătorului, ecuaţiile devin

$$-Q_1 + Q_2 + Q_3 = -q_1 + q_2 + q_3,$$

$$-Q_3 + Q_4 - Q_5 = -q_3 + q_4 - q_5,$$

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = E_1,$$

$$-\frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_4} = 0,$$

$$\frac{Q_4}{C_4} + \frac{Q_5}{C_5} = E_2,$$

cu soluţiile $Q_1 = 164\mu\,C$, $Q_2 = 116\mu\,C$, $Q_3 = 48\mu\,C$,

$$Q_4 = 92\mu\,C, \quad Q_5 = 44\mu\,C.$$

2.4.19. După k comutări ($k = 1, 2, \ldots, n$) ale întrerupătorului pe poziţia b, prima ecuaţie a lui Kirchhoff pentru nodul b se scrie

$$(C_1 + C_2)U_k = C_1E + C_2U_{k-1},$$

unde $U_0 = 0$. De aici rezultă

$$U_n = \frac{C_1E}{C_1 + C_2}\left[1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2} + \ldots + \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)^{n-1}\right] = \left[1 - \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)^n\right]E$$

sau $U_n = 10\,(1 - 0{,}8^n)$ V.

2.4.20. a) $W_{1a} = 50\ \mu J$, $W_{2a} = 0$; b) $W_{1b} = 2\ \mu J$, $W_{2b} = 8\ \mu J$.

2.4.21. $U_2^{(n)} = \left[1 - \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)^n\right]E.$

Scanned with OKEN Scanner

2.4.22. a) $Q_1 = nCU_1$; b) $U_2 = nU_1$.

2.5.1. $W_c = e\dfrac{l}{d}U = 2{,}56\cdot10^{-17}$ J.

2.5.2. $v = \sqrt{\dfrac{2}{m}e\,(V_B - V_A)} = 5{,}93\cdot10^5$ m/s.

2.5.3. $v_A = \sqrt{v_B^2 - \dfrac{2q}{m}\,(V_A - V_B)} = 4$ m/s.

2.5.4. $v_A = 7$ m/s.

2.5.5. $W_c = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q_1\,q_2}{d} = 45$ J.

2.5.6. $\dfrac{m\,v_0^2}{2} = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,qQ\left(\dfrac{1}{r_{min}} - \dfrac{1}{r_0}\right)$; $r_{min} = 5{,}38$ mm.

2.5.7. $r_{min} = 4{,}5\cdot10^{-15}$m, $F_{max} = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\cdot\dfrac{qQ}{r^2_{min}} = \dfrac{m\,v_0^2}{2r_{min}} = 294$ N.

2.5.8. a) $F = e\dfrac{U}{d} = 1{,}6\cdot10^{-15}$ N; b) $a = \dfrac{F}{m} = 1{,}76\cdot10^{15}$ m/s^2;

c) $t = \sqrt{\dfrac{2d}{a}} = 3{,}36\cdot10^{-9}$ s; d) $v = at = 5{,}91\cdot10^6$ m/s.

2.5.9. a) $mg = kv_1$, $mg - q\dfrac{U}{d} = kv_2 \Rightarrow q = \dfrac{mgd}{U}\left(1 - \dfrac{v_2}{v_1}\right) =$

$= 8\cdot10^{-19}$C $= 5e$; b) $mg + q\dfrac{U}{d} = kv_3 \Rightarrow v_3 = 2v_1 - v_2 = v_2 =$

$= 0{,}28$ mm/s; c) $v = 0 \Rightarrow U' = \dfrac{m\,g\,d}{q} = \dfrac{v_1}{v_1 - v_2}U = 1225$ V.

2.5.10. $U = \dfrac{m\,g\,d}{q}\,\mathrm{tg}\,\alpha = 392$ V.

Scanned with OKEN Scanner

2.5.11. $v_0 = \sqrt{2gh_1} = 1{,}4$ m/s; $v_x = at$, $v_y = v_0 + gt$,

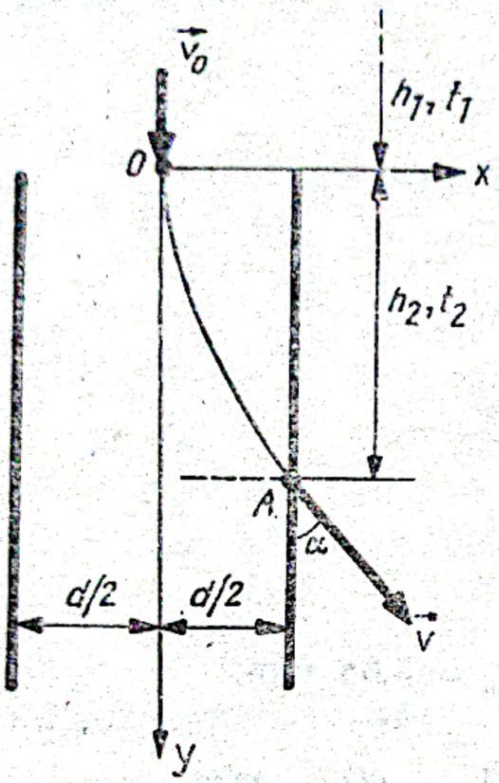


Fig. 2.5.11 R.

$$x = \frac{at^2}{2}, \quad y = v_0 t + \frac{gt^2}{2};$$

$$a = \frac{qU}{md}; \qquad x_A = \frac{d}{2} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{d}{a}}.$$

$$v_{Ax} = \sqrt{ad}, \quad v_{Ay} = v_0 + g\sqrt{\frac{d}{a}};$$

a) $v_{Ax} = v_{Ay} \Rightarrow a = g + \frac{v_0}{2d}(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4dg}) = 83{,}2$ m/s²;

$$U = 1664 \text{ V};$$

b) $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 0{,}202$ s, $t_2 = 0{,}015$ s, $t = 0{,}217$ s;

c) $h_2 = y_A = 2{,}29$ cm.

2.5.12. $qE - \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho - \rho_0) g = 6\pi \eta r v_1$,

$$qE + \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho - \rho_0) g = 6\pi \eta r v_2;$$

a) $r = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\eta (v_2 - v_1)}{g(\rho - \rho_0)}} = 0{,}947 \cdot 10^{-6}$ m;

b) $E = 3\pi\eta \frac{r}{q}(v_1 + v_2) = 0{,}976 \cdot 10^4$ V/m;

c) $v_3 = \frac{v_2 - v_1}{2} = 0{,}1$ mm/s.

Scanned with OKEN Scanner

2.5.13. $U_{min} = \dfrac{d^2}{l^2}\dfrac{m}{q}v_0^2 \approx 5{,}7 \cdot 10^{-4}\text{V}.$

2.5.14. a) $v_0 = \sqrt{\dfrac{2e\,U_a}{m}} = 4 \cdot 10^7 \text{ m/s};$

b) $v_x = v_0, \quad v_y = at, \quad x = v_0\,t, \; y = \dfrac{at^2}{2};$

$$a = \frac{eU}{m\delta}; \; x_A = l \Rightarrow t_A = \frac{l}{v_0}, \; v_{Ax} = v_0,$$

$$v_{Ay} = \frac{eU}{m\delta} \cdot \frac{l}{v_0} = 3{,}52 \cdot 10^4 \cdot U \; [m/s],$$

$$d = y_A = \frac{1}{2}\frac{eU}{m\delta}\frac{l^2}{v_0^2} = \frac{1}{4}\frac{l^2}{\delta} \cdot \frac{U}{U_a} = 1{,}76 \cdot 10^{-5} \cdot U \text{ [m]};$$

c) $D = \dfrac{v_{Ay}}{v_{Ax}} L + d = 17{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot U \; [m].$

2.5.15. a) Accelerația este nulă în punctul B în care forța ce acționează asupra corpului se anulează.

$$F = G \sin\alpha \Rightarrow \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = mg\sin\alpha \Rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\,\varepsilon_0\, mg\sin\alpha}} = 0{,}3 \text{ m}.$$

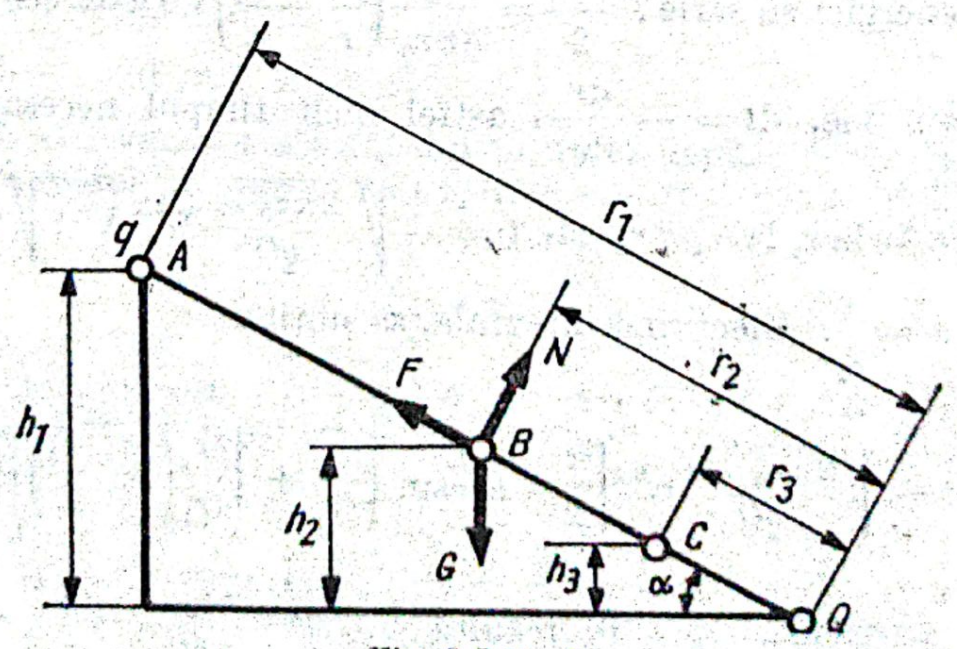


Fig. 2.5.15. R.

b) În punctul inițial A și în punctul cel mai apropiat C, corpurile sînt în repaus, astfel încît energia sistemului se compune numai din energia potențială gravitațională și energia de interacțiune electrostatică. Conform principiului conservării energiei

$$mgh_1 + \frac{qQ}{4\pi\ \varepsilon_0\ r_1} = mgh_3 + \frac{qQ}{4\pi\ \varepsilon_0\ r_3},$$

de unde

$$r_3 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\ h_1\ mg} = 0{,}09\ \text{m}.$$

c) În intervalul AB, corpul este accelerat, iar în intervalul BC este frînat, astfel încît viteza maximă este atinsă în B. În acest caz, conservarea energiei se exprimă sub forma

$$mgh_1 + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\ r_1} = mgh_2 + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\ r_2} + \frac{mv^2}{2},$$

de unde

$$v = (r_1 - r_2)\sqrt{\frac{2g\sin\alpha}{r_1}} = 2{,}19\ \text{m/s}.$$

2.5.16. Pentru o distanță $r < r_1$ între particule, principiul conservării energiei se scrie: $\frac{mv^2}{2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$. Deoarece particulele se apropie, $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}r}{|v|}$, astfel încît timpul necesar pentru deplasarea de la r_1 la $r_2 < r_1$ este $t = -\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0\ m}{qQ}}\ r_1^{3/2}\int_1^{r_2/r_1}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$, de unde $x = \frac{r}{r_1}$. Efectuînd integrala, se obține

$$t = \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0\ m}{qQ}}\ r_1^{3/2}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{r_2}{r_1}} + \sqrt{\frac{r_2}{r_1}\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)}\right].$$

în cazul particular $r_2 = 0$, rezultă $t = \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0\ m}{qQ}}\ r_1^{3/2}\ \frac{\pi}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

3.1.1. a) $I = 53{,}3$ A; b) $J = 5{,}33 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = 5{,}33 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$.

3.1.2. $v = 2{,}51 \cdot 10^{-6}$ m/s $= 2{,}51 \cdot 10^{-4}$ cm/s.

3.1.3. $I = n_0 Q A\ (v_+ + v_-)$, $J = nQ\ (v_+ + v_-)$.

3.1.4. $i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$. Dacă $Q > 0$ și $\tau > 0$ rezultă $i < 0$.

Aceasta înseamnă că dacă se micșorează sarcina electrică q, adică condensatorul se descarcă, intensitatea curentului electric este negativă pentru sensul de referință considerat. Semnul minus obținut pentru sensul de referință considerat evidențiază faptul că intensitatea curentului care „încarcă" condensatorul este negativă atunci cînd sarcina condensatorului descrește.

3.1.5. a) $J_{max} = \frac{I_{max}}{A_{min}} = 3 \cdot 10^2\ \mu\text{A/m}^2 = 3 \cdot 10^{-4} \mu$ A/mm^2.

b) $\frac{J_i}{J_e} = \frac{A_i}{A_e} = \frac{r_e}{r_i} = 4$; c) $J = \frac{I_{max}}{(2\pi r)l} \sin 2\pi \cdot 50t =$

$$= \frac{3}{10r} \sin 2\pi \cdot 50t\ \mu\text{A/m}^2.$$

3.1.6. $I = 4{,}63$ A

3.1.7. $t = 40$ min și 20 s.

3.1.8. Grosimea a a stratului uniform depus fiind mică față de raza R a sferei pe care el se depune, volumul stratului V se poate aproxima prin

$$V \approx 4\pi R^2 a. \tag{1}$$

Exprimînd masa m în funcție de densitatea d a cuprului și intensitatea I în funcție de densitatea curentului electric J se mai obțin relațiile

$$m = Vd \tag{2}$$

$$I = 4\pi R^2 J. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţiile de mai sus şi din legile electrolizei rezultă în final ecuaţia

$$(4\pi R^2 a)\ d = k\,(4\pi R^2 J)\cdot t, \qquad (4)$$

unde k este echivalentul electrochimic al cuprului $k = 0{,}329$ mg/C. Din ecuaţia (4) se obţine

$$a = \frac{kJt}{d} = \frac{0{,}329\cdot 10^{-6}\,\text{kg/C}\cdot 0{,}1\,\text{A/cm}^2\cdot 3600\,\text{s}}{8{,}9\,\text{kg/dm}^3} = 0{,}133\ \text{mm}.$$

3.1.9. $\gamma = \dfrac{I_{măs} - I}{I} = \dfrac{I_{măs} - \dfrac{m}{kt}}{\dfrac{m}{kt}} = -4{,}75\cdot 10^{-2};\ \gamma\% = -4{,}72\%$

3.2.1. $L = 1{,}4$ km

3.2.2. a) $a = 1$ mm; b) $L \approx 1$ km.

3.2.3. Intensitatea curentului din linia de rezistenţă r este

$$I = \frac{U}{R+r}. \qquad (1)$$

Căderea de tensiune pe linie are expresia

$$\Delta U = rI. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) se obţine

$$\Delta U = \frac{r}{r+R}\,U, \qquad (3)$$

$$r = R\,\frac{\Delta U}{U - \Delta U}. \qquad (4)$$

Folosind şi expresia rezistenţei

$$r = \rho\,\frac{2L}{a} \qquad (5)$$

$$\text{cu } A = \frac{\pi d^2}{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi}\frac{\rho L}{R}\left(\frac{U}{\Delta U} - 1\right)} = \sqrt{\frac{4}{\pi} 90 \frac{1{,}7 \cdot 10 - 2}{50} \cdot \left(\frac{220}{6{,}6} - 1\right)} =$$

$$= \sqrt{39 \cdot 10^{-3}\,(32{,}4)} = \sqrt{1260 \cdot 10^{-3}} = 1{,}12 \text{ mm}.$$

3.2.4. a) $R = R_0\,[1 + \alpha\,(\theta - \theta_0)] = 1{,}216 \cdot 10^{-2}\Omega$;

b) $\dfrac{R - R_0}{R_0} = 0{,}36 = 36\%$.

3.2.5. $\theta = 1820°$ C.

3.2.6. a) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{\sqrt{\rho_1 \dfrac{4L_1}{\pi R_1}}}{\sqrt{\rho_2 \dfrac{4L_2}{\pi R_2}}} = \sqrt{\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\dfrac{L_1}{L_2}\dfrac{R_2}{R_1}}$;

b) $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{d_1 V_1}{d_2 V_2} = \dfrac{d_1 \dfrac{\pi a_1^2}{4} L_1}{d^2 \dfrac{\pi a_2^2}{4} L_2} = \dfrac{d_1\,\rho_1\,L_1\,R_2}{d_2 \rho_2 L_2 R_1}\dfrac{L_1}{L_2} =$

$$= \frac{d_1\,\rho_1}{d_2\,\rho_2}\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2;$$

c) $\dfrac{R_{1\theta}}{R_{2\,\theta}} = \dfrac{R_1\,[1 + \alpha_1\,(\theta - \theta_0)]}{R_2[1 + \alpha_2\,(\theta - \theta_0)]} = \dfrac{1 + \alpha_1\,(\theta - \theta_0)}{1 + \alpha_2\,(\theta - \theta_0)}\dfrac{R_1}{R_2}$

d) $\dfrac{R - R'}{R'} =$

$$= \frac{\dfrac{L}{\dfrac{\pi d^2}{4}}\rho_0\,[1 + \alpha(\theta - \theta_0)] - \dfrac{L\,[1 + \gamma\,(\theta - \theta_0)]}{\dfrac{\pi d^2}{4}\,[1 + \gamma(\theta - \theta_0)]^2}\,\rho_0\,[1 + \alpha\,(\theta - \theta_0)]}{\dfrac{L}{\dfrac{\pi d^2}{4}}\,\rho_0\dfrac{1 + \alpha(\theta - \theta_0)}{1 + \gamma\,(\theta - \theta_0)}} =$$

$$= 1 + \gamma\,(\theta - \theta_0) - 1 = \gamma\,(\theta - \theta_0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru cazul unui conductor de cupru la o variaţie a temperaturii de $\theta - \theta_0 = 60°C$, rezultă:

$$\frac{R - R'}{R'} = 1{,}7 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{grd}} 60 \text{ grd} = 1{,}02 \cdot 10^{-3} = 0{,}102\ \%.$$

Erorile uzuale de calcul sînt mai mari decît 1%, deci eroarea produsă de neluarea în considerare a dilataţiei liniare de 0,102% este neglijabilă.

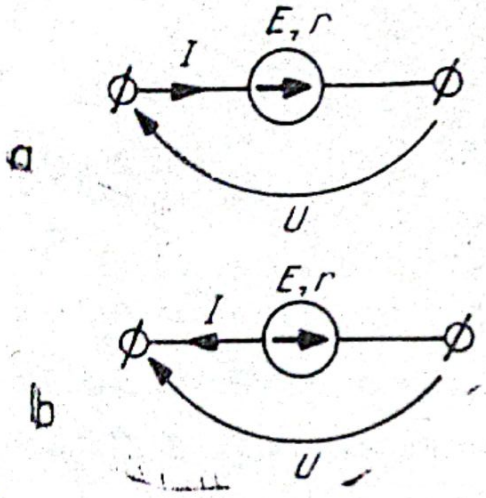


Fig. 3.2.8 R.

3.2.7. a) $U + E = rI$;

b) $-U + E = rI$;

c) $U - E = rI$;

d) $-U + E = -rI$.

3.2.8. În enunţ nu se precizează sensul de referinţă faţă de care intensitatea curentului are valoarea $I = 100$ A. Există două posibilităţi de a alege acest sens de referinţă, la fel ca pentru t.e.m. E sau în sens opus. Aceste două posibilităţi, reprezentate în figura a) respectiv b) corespund cazului cînd sursa funcţionează ca generator, respectiv cazului cînd „sursa" funcţionează ca receptor de energie, faţă de circuitul exterior conţinînd alte surse şi legat la bornele ei. Acestor cazuri le corespund respectiv relaţiile:

$$\text{a)}\ -U + E = rI \Rightarrow U = E - rI = 95 \text{ V}$$

$$\text{(b)} = -U + E = rI \Rightarrow U = E + rI = 105 \text{ V}.$$

Problema are deci două soluţii. În cazul a), curentul are sensul t.e.m. şi tensiunea la borne este mai mică decît t.e.m. În cazul b), curentul circulă în sens opus (ceea ce este posibil dacă există alte surse în circuitul exterior care determină acest sens de circulaţie al curentului) şi tensiunea la borne este mai mare decît t.e.m.

3.2.9 $E = U_g$, $r = \dfrac{U_g}{I_{sc}}$; există două soluţii indicate în figură.

Scanned with OKEN Scanner

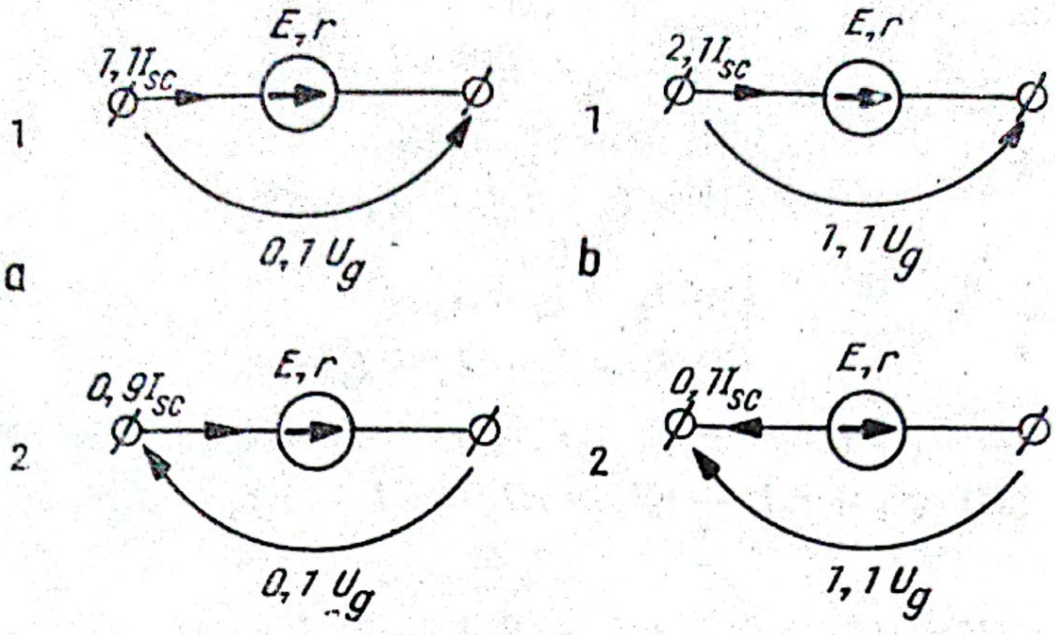


Fig. 3.2.9. R.

3.2.10. a) $E = -\dfrac{U_2 I_1 - U_1 I_2}{I_1 - I_2}$, $r = \dfrac{U_1 - U_2}{I_1 - I_2}$;

b) $I_0 = \dfrac{U_0 + E}{r} = \dfrac{(U_0 + U_2) I_1 - (U_0 + U_1) I_2}{U_1 - U_2}$.

c) Pentru ca soluția să corespundă din punct de vedere fizic trebuie ca rezistența internă a sursei să fie strict pozitivă sau nulă. Rezultă condițiile de realizabilitate fizică

$U_1 = U_2 \Rightarrow r = 0$ și $E = U_1 = U_2$ (prin ipoteză regimurile sînt diferite și deci: $U_1 = U_2 \Rightarrow I_1 \neq I_2$), sau $U_1 - U_2$ și $I_1 - I_2$ de același semn și $I_1 \neq I_2$. (Pentru $I_1 = I_2$ și $U_1 \neq U_2$ ar rezulta expresii fără sens pentru E și r).

3.3.1. a) $I = 5$ A; b) $I_{10} = 2$ A, $I_6 = 4$ A, $I_9 = 1$ A, $I_7 = I_8 = I_3 = 2$ A, $I_0 = 0,2$ A; c) $I_4 = -I_5 = 3$ A, $I_3 = -8$ A, $I_1 = -5$ A, $I_2 = 2$ A; d) $I_3 = 1$ A, $I_2 = 2$ A, $I_1 = 3$ A.

3.3.2. a) $I = 2$ A, $U_1 = 6$ V, $U_2 = 4$ V, $U = 10$ V; b) $I = 1$ A, $U_1 = 8,5$ V, $U_2 = 5$ V, $U_3 = 2$ V, $U_4 = -5$ V, $U_5 = 1,5$ V, $U_6 = -7$ V, $U_7 = 2$ V.

Scanned with OKEN Scanner

3.3.3.

(a)

$$(A)\ -I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

$$(I)\ RI_1 + r_1 I_2 = E_1,$$

$$(II)\ r_1 I_2 - r_2 I_3 = E_1 - E_2;$$

(b)

$$(B)\ I_2 - I_4 - I_5 = 0,$$

$$(C)\ I_1 - I_3 - I_4 - I_5 = 0,$$

$$(I)\ R_1 I_1 + r_2 I_1 + R_{12} I_3 + r_8 I_3 + r_9 I_1 = E_2 - E_8 + E_9,$$

$$(II)\ r_3 I_2 + r_4 I_2 + r_5 I_5 + r_6 I_5 + r_7 I_5 - r_8 I_3 - R_{12} I_3 = E_3 - E_4 + E_8,$$

$$(III)\ r_5 I_5 + r_6 I_5 + r_7 I_5 - R_{11} I_4 - R_{10} I_4 = 0;$$

(c)

$$(A)\ I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$(B)\ -I_1 + I_2 + I_4 = 0,$$

$$(C)\ I_3 - I_5 - I_6 = 0$$

$$(I)\ R_1 I_1 + r_1 I_1 + R_2 I_2 + r_3 I_2 + R_3 I_1 = E_1 + E_3 + E_2,$$

$$(II)\ R_6 I_6 - R_7 I_5 = 0,$$

$$(III)\ R_5 I_3 + R_7 I_5 + r_4 I_4 + R_8 I_4 + R_4 I_4 - r_3 I_2 - R_2 I_2 = E_4 - E_5 - E_3.$$

3.3.4. Se observă că folosind legea lui Ohm şi teoremele lui Kirchoff toţi curenţii se pot determina din aproape în aproape, pornind de la I_5 (în general, la circuitele serie-paralel pornind de la curentul uneia din laturile legate în paralel se pot determina relativ simplu ceilalţi curenţi). Astfel, se obţine

$$U' = R_5 I_5 = 2\ \text{V},\ I_4 = \frac{U'}{R_4} = 1\ \text{A},\ I_3 = I_4 + I_5 = 3\ \text{A},$$

$$U''' = R_3 I_3 = 9\ \text{V},\quad U''' = U' + U'' = 11\ \text{V},\ I_2 = \frac{U'''}{R_2} = 11\ \text{A},$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 14\ \text{A},\quad U^{iv} = R_1 I_1 = 28\ \text{V},\quad U = U^{iv} + U''' = 39\ \text{V}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.3.5. (a) $I_2 = 0$, $I_1 = -1\text{A}$, $R_1 = 2\ \Omega$; b) $I_1 = 1 - 2 = -1\ \text{A}$, $1 \cdot I_2 + 1 \cdot (-1) - 0{,}5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 1 - 2 = I_2 = 7\ \text{A}$, $I_3 = I_2 - 2 = -9\ \text{A}$, $I_5 = 3 + 1 = 4\ \text{A}$,

$$R_1 I_5 + I_1 + 9{,}51 + 0{,}5 \cdot 1 = 20 + 1 \Rightarrow R_1 = \frac{21 - 9}{4} = 3\Omega,$$

$$I_4 = -I_2 - I_5 + I_1 = -12\text{A}, \quad 0{,}1\, I_3 + 2I_3 + 1I_4 - 1I_2 = E_3$$

$$\Rightarrow E_3 = -37{,}9\ \text{V}$$

$$R_4 \cdot 3 + R_1 I_5 - 1 \cdot I_4 + 0{,}5 \cdot 3 = 34{,}5\ \text{V} \Rightarrow R = 3\ \Omega.$$

3.3.6. $I = \dfrac{r_2 E_1 + r_1 E_2}{r_1 r_2 + r_1 r + r_2 R}$, $I_1 = \dfrac{(r_2 + R)E_1 - RE_2}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2)R}$,

$$I_2 = \frac{(r_1 + R)\, E_2 - RE_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2)R};$$

a) $U = RI$; b) $U_g = \dfrac{r_1 E_2 + r_2 E_1}{r_1 + r_2}$; c) $I_{sc} = \dfrac{E_1}{r_1} + \dfrac{E_2}{r_2}$.

3.3.7. Se observă că, din motive de simetrie, prin elementele identice legate în paralel trece acelaşi curent şi deci

$$I_1 = I_2 = \frac{I}{2}, \quad I_5 = I_6 = \frac{I}{2},$$

unde cu I s-a notat intensitatea curentului din rezistoarele r_3 şi r_4, care formează partea neramificată a circuitului. Aplicînd apoi a doua teoremă a lui Kirchhoff buclei formate din elementele E_2, r_3, r_5, r_4 rezultă

$$r' \frac{I}{2} + r_3 I + r'' \frac{I}{2} + r_4 I = E \Rightarrow I = \frac{2E}{r' + r'' + 2\,(r_3 + r_4)},$$

Se observă că simetria simplifică considerabil rezolvarea problemei, care altfel, pe baza teoremelor lui Kirchhoff, ar conduce la un sistem de şase ecuaţii cu şase necunoscute.

Scanned with OKEN Scanner

3.3.8. Indicaţie: se consideră cîte o sursă ideală ($r = 0$) care, conectată la bornele circuitului, să dea tensiunea U, se scriu teoremele lui Kirchhoff şi se rezolvă sistemul de ecuaţii obţinut.

(a) $I_1 = \dfrac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}\, U$, $I_2 = \dfrac{R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}\, U$;

$I_3 = \dfrac{R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}\, U$; $U_1 = R_1I_1$; $U_2 = R_2I_2$; $U_3 = R_3I_3$;

b) $I = \left(\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_1 + R_2}\right) U$, $I_3 = \dfrac{U}{R_3}$, $I_1 = \dfrac{U}{R_1 + R_2}$,

$U_3 = U$, $U_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\, U$, $U_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\, U$

c) $I_1 = \dfrac{R_2 + R_3}{N}(U + E_1) - \dfrac{R_3}{N}\, E_2$, $I_3 = \dfrac{R_2}{N}(U + E_1) + \dfrac{r_1}{N}\, E_2$,

$I_2 = \dfrac{R_3}{N}(U + E_1) - \dfrac{r_1 + R_3}{N}\, E_2$, $U' = r_1I_1 - E_1$, $U'' = R_3I_3$ cu

$N = r_1R_2 + R_2R_3 + R_3r_1$;

d) $I' = \dfrac{(R_3 + r_3) + R_4}{N}(E_1 + E_2) - \dfrac{R_4}{N}\, E_3$,

$I = \dfrac{(R_1 + r_1 + r_2 + R_2)}{N}\, E_3 - \dfrac{R_4}{N}(E_1 + E_2)$,

$I'' = \dfrac{r_3 + R_3}{N}(E_1 + E_2) + \dfrac{R_1 + R_2 + r_1 + r_2}{N}\, E_3$,

$N = (r_3 + R_3)\, R_4 + R_4 (R_1 + r_1 + r_2 + R_2) + (R_1 + r_1 + r_2 + R_2) \cdot$

$\cdot (r_3 + R_3)$.

Scanned with OKEN Scanner

3.3.9. $R = 4{,}4\ \Omega$.

3.3.10. $\frac{E_1}{r_1} = -\frac{E_2}{r_2}$. Cu alte cuvinte una din surse trebuie să aibă polaritatea inversată, iar curenţii lor de scurtcircuit trebuie să fie egali $|I_{sc1}| = |I_{sc2}|$.

3.3.11. $I_{sc} = I_{sc1} + I_{sc2} = 11 + 21 = 32$ A. (Acest curent de scurtcircuit s-ar menţine un timp foarte scurt, deoarece ar defecta bateriile).

3.3.12. a) $U_{AB} = 10$ V, $I_{sc\ AB} = 12$ A; b) $U_{AB} = 1{,}5$ V, $I_{sc\ AB} =$

$$= \frac{E_1}{r_1 + r_2 + r_7} + \frac{E_5 - E_6}{r_3 + r_4 + r_5 + r_6} = \frac{9}{7{,}5} +$$

$$+ \frac{-8}{9{,}5} \approx 1{,}2 - 0{,}844 \approx 0{,}356 \text{ A}.$$

3.3.13. a) $I = 4$ A; b) $E = 24{,}8$ V; c) $I_{sc} = \frac{E}{r} =$

$$= 124 \text{ A}, \quad U_{V\ sc} = 0.$$

3.3.14. Formula rezultă imediat din legea lui Ohm şi din prima teoremă a lui Kirchhoff. Într-adevăr, folosind conductanţa $G_k = \frac{1}{R_k}$, legea lui Ohm pentru latura k exprimă intensitatea curentului din această latură în funcţie de U şi R_k

$$I_k = G_k(U + E_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Din prima teoremă a lui Kirchhoff se obţine relaţia

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0. \tag{2}$$

Înlocuind în ultima relaţie expresia de mai sus a lui I_k se capătă o ecuaţie în U, care rezolvată dă formula din enunţ. Se remarcă faptul că în această formulă toate mărimile au acelaşi sens de referinţă (în figură acest sens este de jos în sus). Formula stabilită e foarte utilă la rezolvarea oricărui circuit cu conexiune paralel, deoarece simplifică foarte mult calculele. Într-adevăr, odată calculată tensiunea, fiecare

Scanned with OKEN Scanner

intensitate de curent rezultă direct din formula (1), fără să mai fie nevoie să se scrie teoremele lui Kirchhoff şi să se rezolve sistemul de m ecuaţii obţinut din aceste teoreme.

3.3.15. $R = r_1 \dfrac{E_2}{E_1 - E_2} = 0{,}25\ \Omega$; condiţia este $E_1 > E_2$.

3.3.16. $U' = \dfrac{2E_1E_2 + U(E_1 - E_2)}{E_1 + E_2}$; a) $U' = 5{,}4$ V; b) $U' = 4{,}2$ V,

faţă de sensul de referinţă din figura enunţului.

3.3.17. Condiţiile necesare şi suficiente pentru a se obţine un curent cu intensitate mai mare, sînt:

$$\text{a) } \frac{E'}{E} > \frac{r' + R}{r + R}; \quad \text{b) } \frac{E'}{E} > \frac{r'}{r + R}; \quad \text{c) } \frac{E'}{E} > \frac{R}{r + R}.$$

3.3.18. Curentul din circuitul serie are iniţial o valoare care rezultă direct din a doua teoremă a lui Kirchoff

$$I = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + E_m}{R + r_1 + \ldots + r_m}. \tag{1}$$

După introducerea noii surse în serie cu circuitul anterior rezultă analog curentul

$$I' = \frac{E + E_1 + \ldots + E_m}{r + R + r_1 + \ldots + r_m}. \tag{2}$$

Condiţia de mărire a curentului se exprimă $I' > I$ din care rezultă condiţia echivalentă

$$I_{sc} = \frac{E}{r} > \frac{E_1 + E_2 + \ldots + E_m}{R + r_1 + \ldots + r_m} = I. \tag{3}$$

Ca urmare, pentru ca sursa nou introdusă în serie în circuitul dat să mărească intensitatea curentului este necesar şi suficient ca această nouă sursă să aibă un curent de scurtcircuit mai mare decît curentul I din circuitul iniţial.

Scanned with OKEN Scanner

3.3.19. $U_0 > U$, adică tensiunea în gol la bornele sursei adăugate trebuie să fie mai mare decît tensiunea inițială U de la bornele circuitului inițial. (Indicație: se calculează noua tensiune U' și vechea tensiune U. Apoi se pune condiția de mărire a curentului din rezistor $I = \frac{U'}{R} > I = \left(\frac{U}{R}\right)$.

3.3.20. a) $I = 30$ A; b) $U = 20{,}8$ V.
(În acest caz sensul curentului fiind opus sensului de referință ales, el este opus și sensului t.e.m. Acest lucru este realizat prin acțiunea unei surse exterioare care ar acționa în circuitul din care fac parte cele două surse considerate.)

3.3.21. Folosind conductanțele $G = \frac{1}{R}$, din legea lui Ohm, și prima teoremă a lui Kirchhoff se obține

$$V_0 = \frac{G_A V_A + G_B V_B + G_C V_C + G_D V_D}{G_A + G_B + G_C + G_D}; \quad I_A = G_A (V_A - V_0) =$$

$$= G_A \frac{G_B(V_B - V_0) + G_C(V_C - V_0) + G_D(V_D - V_D)}{G_A + G_B + G_C + G_D} \text{ etc.}$$

3.3.22. a) $E = 4$ V, $r = 0{,}26\ \Omega$; b) $U_0 = -4$ V, $I_{sc} = 16$ A;
c) $I = 4$ A, $U = -3$ V.

3.3.23. În regimul cu mărimile E, r, R, I este valabilă relația dată de a doua teoremă a lui Kirchhoff

$$I = \frac{E}{r + R}. \tag{1}$$

Într-un regim în care rezistența externă este βR intensitatea curentului se notează αI. Ca urmare în acest al doilea regim este valabilă relația

$$\alpha I = \frac{E}{r + \beta R}. \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă relația pe care o satisface coeficienții α, β și rezistențele r, R

$$\alpha = \frac{r + R}{r + \beta R}. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd raportul rezistenţelor în regimul iniţial

$$K = \frac{R'}{r'} \tag{4}$$

rezultă

$$\alpha = \frac{1 + K}{1 + \beta K} \tag{5}$$

$$K = \frac{1 - \alpha}{\alpha\beta - 1}. \tag{6}$$

Din condiţia dată în enunţ se calculează

$$K = \frac{1 - 0{,}75}{0{,}75 \cdot 1{,}5 - 1} - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{8} - 1} = 2. \tag{7}$$

Ceea ce înseamnă că iniţial rezistenţa exterioară este de două ori mai mare decît rezistenţa internă a acumulatorului.

Din (5) se obţine apoi răspunsul căutat $\alpha = 1{,}2$. Aceasta corespunde unei creşteri a curentului cu 20%, adică intensitatea căutată a curentului este $1{,}2 \cdot 12 = 14{,}4$ A.

3.3.24. $E = 14$ V, $r = 4\ \Omega$.

3.3.25. a) $U = -24$ V, b) $I_1 = 6$ A, $I_2 = 4$ A, $I = 10$ A, $i = 0$.

3.3.26. $U_1 = V_1 = 220$ V, $U_2 = V - V_2 = -100$ V,

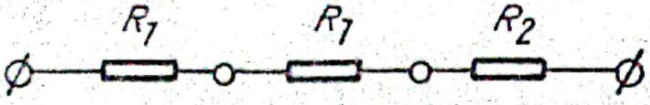
$U_3 = V_3 - V_2 = 50$ V; $U_4 = V_2 - V_1 = -120$ V.

3.3.27. $R_1 = 1\ \Omega$.

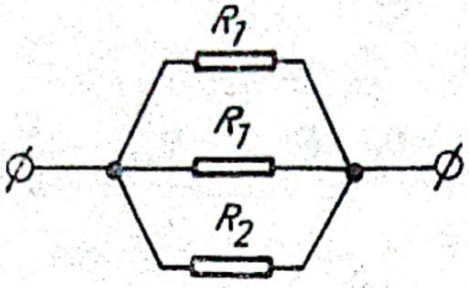
3.3.28. a) 4,95 kΩ respectiv 99,95 kΩ; b) 0,504 Ω respectiv 0,102 Ω; c) 0,05 $\frac{\text{V}}{\text{div}}$, 1 $\frac{\text{V}}{\text{div}}$, 1 $\frac{\text{mA}}{\text{div}}$ respectiv 5 $\frac{\text{mA}}{\text{div}}$,

3.4.1.

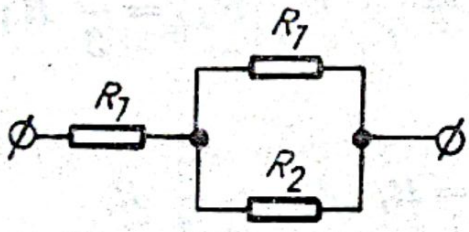
Scanned with OKEN Scanner

1 

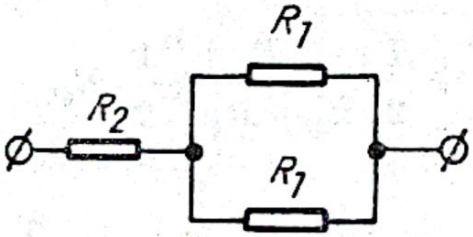
$R_e = 11\ \Omega$

2 

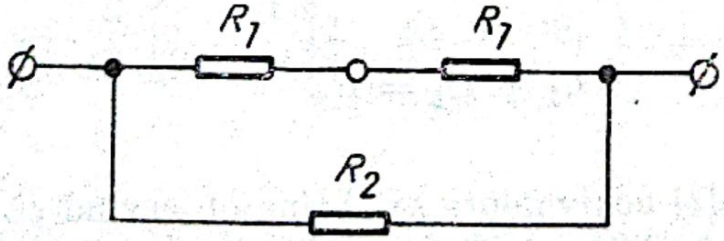
$R_e = 1{,}2\ \Omega$

3 

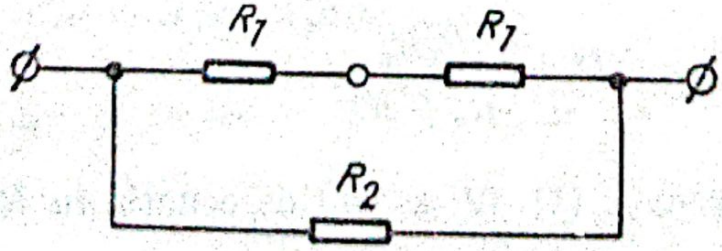
$R_e = \frac{40}{7}\ \Omega$

4 

$R_e = 5\ \Omega$

5 

$R_e = \frac{24}{11}\ \Omega$

6 

$R_e = \frac{28}{18}\ \Omega$

Fig. 3.4.1. R.

Scanned with OKEN Scanner

3..2.

(a) : $R_{AB} = \frac{3}{4} R$, $R_{AC} = \frac{7}{4} R$, $R_{AD} = 2R$;

(b) : $R_{AB} = \frac{4}{3} R$, $R_{AC} = 0$, $R_{BC} = R_{AB} = \frac{4}{3} R$;

(c) : $R_{AB} = \frac{4}{3} R$, $R_{AC} = \frac{13}{6} R$, $R_{AD} = \frac{2}{3} R$;

(d) : $R_{AB} = \frac{3}{4} R$, $R_{AC} = R$, $R_{AD} = \frac{3}{4} R$.

3.4.3. $R_e = 2R_1 + \frac{1}{6} R_2 + \frac{1}{2} \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + \frac{1}{2} R_5$.

3.4.4. $R_e = \frac{13}{19} R = 17{,}1\ \Omega$.

3.4.5. Fie R_1 şi R_2 rezistenţele celor două arce de inel cuprinse între borne

$$R_1 + R_2 = R. \tag{1}$$

Expresia rezistenţei echivalente se obţine observînd că cele două arce cuprinse între borne constituie rezistoare legate în paralel

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{2}$$

Din sistemul de ecuaţii (1), (2) se obţine ecuaţia în R_1

$$R_1^2 - RR_1 + RR_e = 0, \tag{3}$$

care rezolvată dă

$$R_1 = \frac{R}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{R_e}{R}}\right). \qquad (4)$$

Pentru $R_e > \frac{R}{4}$ relaţia (4) nu dă valori reale pentru R_1.

Ca urmare problema are soluţie numai pentru $R_e \in \left[0, \frac{R}{4}\right]$.

Rezistenţa R_2 are valoarea $R_2 = R - R_1$ adică

$$R_2 = \frac{R}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{R_e}{R}}\right). \qquad (5)$$

Aceasta arată că fizic vorbind, pentru $R_e \leqslant \frac{R}{4}$, există o singură soluţie (valorile lui R_1 şi R_2 se schimbă doar între ele), aceea de a lua o porţiune de inel cu o rezistenţă

$$\frac{R}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\frac{R_e}{R}}\right),$$

în paralel cu restul inelului.

3.4.6. $R_{AB} = \frac{8}{13}R$, $R_{BC} = \frac{144}{65}R$, $R_{AC} = \frac{8}{5}R$, $R_{BD} = \frac{66}{65}R$.

3.4.7. $R_a = 90{,}5\ \Omega$.

3.4.8. $x = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)l$; a) $x = 0$, $R_{e.\,max} = R$, b) $x = \frac{l}{2}$, $R_{e.\,min} = \frac{R}{4}$.

3.4.9. Fie r', r'' rezistenţele celor două fire ale liniei de la începutul liniei, la locul defectului respectiv de la locul defectului la sfîrşitul liniei. Curenţii daţi se exprimă

$$I_0 = \frac{U}{r' + R} \qquad (1)$$

$$I_{sc} = \frac{U}{r' + \frac{R'''}{r + r''}}. \qquad (2)$$

Rezistența totală a liniei este

$$r' + r'' = r. \tag{3}$$

Relațiile (1), (2), (3) formează sistemul de trei ecuații din care se pot calcula rezistențele necunoscute r', r'', R. O dată aflate aceste rezistențe cunoscînd rezistența totală a liniei și lungimea ei distanțele se calculează imediat. Pentru simplificarea calculelor se introduc notații pentru rezistențele de intrare ale liniei cu defect, în gol respectiv în scurtcircuit

$$r_g = \frac{U}{I_g}, \quad r_{sc} = \frac{U}{I_{sc}}. \tag{4}$$

Sistemul de ecuații (1), (2), (3) se poate scrie

$$\begin{cases} r' + R = r_g \\ r' + \dfrac{Rr''}{R + r''} = r_{sc} \\ r' + r'' = r. \end{cases} \tag{5}$$

Introducînd valoarea lui r' din prima ecuație în celelalte două rezultă

$$\begin{cases} r_g - R + \dfrac{Rr''}{R + r''} = r_{sc} \\ r_g - R + r'' = r. \end{cases} \tag{6}$$

Scoțînd valoarea lui r'' din a doua ecuație a sistemului (6) și introducînd-o în prima ecuație din acest sistem se obține o ecuație în R

$$r_g - R + \frac{R(r - r_g + R)}{2R + r - r_g} = r_{sc}. \tag{7}$$

Numitorul neputînd fi nul ($r + R \geqslant r_g$) rezultă

$$(r_g - R)(r + 2R - r_g) + R(r - r_g + R) = r_{sc}(2R + r - r_g) \tag{8}$$

sau

$$r_g(r - r_g) - R(r - r_g) + 2Rr_g - 2R^2 + R(r - r_g) + R^2 = r_{sc}(2R + r - r_g)$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$R^2 - 2(r_v - r_{sc})R + (r_g - r_{sc})(r_g - r) = 0. \qquad (9)$$

Rezolvînd ultima ecuație se obține

$$R = (r_v - r_{sc}) \pm \sqrt{(r_v - r_{sc})^2 - (r_g - r_{sc})(r_g - r)}$$

sau final

$$R = (r_v - r_{sc})\left(1 \pm \sqrt{\frac{r - r_{sc}}{r_v - r_{sc}}}\right) = U\left[\left(\frac{1}{I_g} - \frac{1}{I_{sc}}\right)\right.$$

$$\left.\left(1 \pm \sqrt{\frac{\frac{r}{U} - \frac{1}{I_{sc}}}{\frac{1}{I_g} - \frac{1}{I_{sc}}}}\right)\right]. \qquad (10)$$

Din sistemul (5) rezultă apoi

$$r' = r_{sc} \pm \sqrt{(r_g - r_{sc})(r - r_{sc})}. \qquad (11)$$

Lungimea căutată, de la începutul liniei pînă la locul defectului este

$$L' = \frac{r'}{r} L = \left[\frac{r_{sc}}{r} \pm \sqrt{\left(\frac{r_g}{r} - \frac{r_{sc}}{r}\right)\left(1 - \frac{r_{sc}}{r}\right)}\right] \text{L}. \qquad (12)$$

D i s c u ț i e. Se observă că rezistențele r_g și r sînt mai mari decît r_{sc} sau cel puțin egale cu această rezistență. De asemenea $r \geqslant r_{sc}$. Ca urmare, soluțiile sînt reale și corespunde fizic numai soluția dată de semnul superior (r' nu poate fi mai mare decît r_{sc}).

Pentru valorile date

$$r' = 7{,}95 \pm \sqrt{6{,}05 \cdot 4{,}05} = \begin{cases} 12{,}90\ \Omega \\ 3\ \Omega \end{cases}$$

și

$$R = 6{,}05\left(1 \mp \sqrt{\frac{4{,}05}{6{,}05}}\right) = 6{,}05\ (1 \mp 0{,}823) = \begin{cases} 1{,}07\ \Omega \\ 11\ \Omega. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prima valoare nu corespunde deoarece o parte r' din rezistența liniei nu poate fi mai mare decît întreaga rezistență r a liniei. Soluția căutată este deci $R = 11\ \Omega$ și distanța de la începutul liniei pînă la sfîrșitul ei $L' = \frac{L}{r} r' = 2$ km.

3.4.10. b) $U_1' = 15$ V, $U_2' = 30$ V, $U_3' = U_3 = 45$ V;

a) $\Delta U_1' = -6$ V, $\gamma_{U_1'} = -40\%$, $\Delta U_2' = -12$ V, $\gamma_{U_1'} = -40\%$,

3.4.11. a) $\alpha_s = \frac{R_{01}\alpha_1 + R_{02}\alpha_2}{R_{01} + R_{02}}$;

b) $\alpha_p = \frac{R_{02}\alpha_1 + R_{01}\alpha_2}{R_{01} + R_{02}}$.

La $R_{01} = R_{02}$ corespunde $\alpha_s = \alpha_p = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$.

3.4.12. Această problemă se poate rezolva simplu numai observînd simetria sistemului. Astfel rezultă ușor valorile curenților din muchii în funcție de curentul total (vezi figura). Tensiunea dintre două vîrfuri opuse se exprimă apoi pe baza faptului că la un circuit de curent continuu tensiunea nu depinde de drum

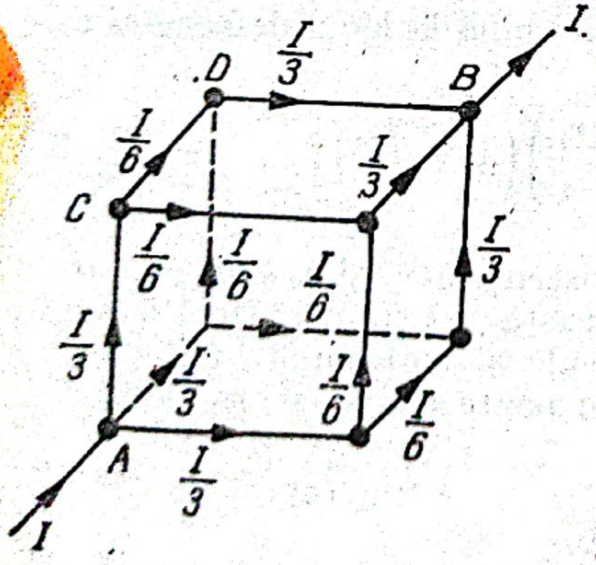


Fig. 3.4.12. R.

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CD} + U_{DB} = R\frac{I}{3} + R\frac{I}{6} + R\frac{I}{3} = \frac{5}{6}RI.$$

Din definiția rezistenței echivalente rezultă

$$R_e = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{5}{6}R.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.4.13.

$$I = \frac{r(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + (R_1 + R_2)(R_2 + R_3)}{r(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_4 (R_2 + R_3) + R_2 R_3 (R_1 + R_4)} U;$$

$$R_e = \frac{U}{I},$$

$$i = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{N},$$

unde N este numitorul din expresia lui I;

$R_1 R_3 = R_2 R_4$, „condiția de echilibru" pentru care $i = 0$;

a) $R_{e,ec} = \frac{\sqrt[4]{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}}{\sqrt[4]{\frac{R_1 R_2}{R_3 R_4}} + \sqrt[4]{\frac{1}{\frac{R_1 R_2}{R_3 R_4}}}}$ sau

sau $$R_{e,ec} = \frac{R_3 + R_4}{R_4 + R_1} R_1;$$

b) $R_{e,sc} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$;

c) $R_{e,v} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$.

La echilibru rezistența echivalentă R_e nu depinde de r, deoarece prin rezistorul r nu circulă curent electric. Ca urmare, R_e se poate pune și sub formele de la b) și c): $R_{e,ec} = R_{e,s} = R_{e,v}$, pentru $R_1 R_3 = R_2 R_4$.

3.4.14. $R_{AB} = \frac{8}{15} R$, $R_{AC} = \frac{2}{3} R$, $R_{AB} = \frac{7}{15} R$.

3.4.15. $R_{AB} = \frac{11}{20} R$, $R_{AC} = \frac{3}{4} R$, $R_{AD} = \frac{4}{5} R$, $R_{AC} = \frac{9}{20} R$.

Scanned with OKEN Scanner

3.4.16. Se observă că laturile desenate cu linie continuă formează un circuit cu conexiune în punte şi anume o punte echilibrată (deoarece produsul rezistenţelor laturilor opuse este egal $R \cdot R = R \cdot R$). Ca urmare, rezistenţa echivalentă a punţii se poate calcula suprimînd diagonala (prin care nu trece curent): $R_e' = \frac{1}{2}(R + R) = R$. Rezistenţa echivalentă a punţii R_e' este în paralel cu rezistenţa R desenată punctat, deci rezistenţa cerută este $R_e = \frac{R}{2}$.

3.4.17. a) $R_{AB} = 34\ \text{m}\Omega$, $R_{AC} = 26\ \text{m}\Omega$, $R_{AD} = 25\ \text{m}\Omega$;

b) $R_{AB} = \frac{3}{4} R$.

3.418. a) $R_{en} = \frac{R}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}}$, $R_{e\infty} = \frac{R}{2}$;

b) $R_{en} = \frac{3R}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$, $R_{e\infty} = \frac{3R}{2}$.

3.4.19. a) $R_{e1} = 18\ \Omega$, $R_{e2} = \frac{33}{2}\Omega$, $R_{e3} = \frac{82}{5}\Omega$;

b) $R_{e1} = 6\ \Omega$, $R_{e2} = \frac{9}{2}\Omega$, $R_{e3} = \frac{22}{5}\Omega$.

3.4.20. Adăugarea unui nou circuit corespunde mereu micşorării ultimei rezistenţe R_2 din circuit (care devine legată în paralel cu o altă rezistenţă). Ca urmare, fiecare conectare a unui nou circuit micşorează rezistenţa echivalentă. Şirul valorilor rezistenţelor echivalente este un şir descrescător cu termeni pozitivi, care se ştie că are limită. Pe de altă parte, între R_{en} şi $R_{e,\,n-1}$ există cîte o relaţie simplă corespunzătoare legării rezistorului echivalent $R_{e,\,n-1}$ la ieşirea primului circuit: $R_{en} = f(R_{e,\,n-1})$ la limită $n \to \infty \Rightarrow R_{en} \to R_e$ şi $R_{e,\,n-1} \to R_e$. Se obţine o ecuaţie $R_e = f(R_e)$ din care se calculează R_e. Procedînd astfel rezultă:

a) $R_{e,\,n} = R_1 + \frac{R_2 R_{e,\,n-1}}{R_2 + R_{e,\,n-1}}$ şi $R_e = R_1 + \frac{R_2 R_e}{R_2 + R_e}$.

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd ultima relaţie ca o ecuaţie în R_e se obţine

$$R_e = \frac{R_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{R_1}{2}\right)^2 + R_1 R_2} \approx 16{,}38\ \Omega;$$

b) $R_{en} = \dfrac{R_2 (R_1 + R_{e,\,n-1})}{R_1 + R_2 + R_{e,\,n-1}}$ şi $R_e = \dfrac{R_1 R_2 + R_2 R_e}{R_1 R_2 + R_3}$.

Ca urmare

$$R_e = -\frac{R_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{R_1}{2}\right)^2 + R_1 R_2} \approx 4{,}38\ \Omega.$$

3.4.21. a) $R_c = 16{,}38\ \Omega$; b) $R_c = 4{,}38\ \Omega$.

3.4.22. Rezistenţele R_c şi R_e sînt egale fiindcă la limită pentru $n \to \infty$ curentul din rezistorul R de la ieşirea ultimului circuit tinde spre zero. Ca urmare, valoarea lui R nu contează şi în loc de R se poate lua R_c. Pentru $R = R_c$ rezistenţa echivalentă nu depinde de numărul de circuite fiindcă $R_{en} = R_c$. Limita unui şir cu elemente identice este valoarea comună a acestor elemente şi deci $R_e = R_c$.

3.4.23. $R_c = \sqrt{RR'} \Rightarrow R_e = R_c = \sqrt{RR'}$.
Pentru $R = R'$ rezultă $R_e = R$. Acest rezultat se obţine direct observînd că pentru $R = R'$ este satisfăcută condiţia de echilibru $R^2 = R'^2$ a punţii şi deci $R_e = \dfrac{1}{2}(R + R) = R$.

3.4.24. V. fig. 3.4.24.R.

3.4.25. V. fig. 3.4.25.R.

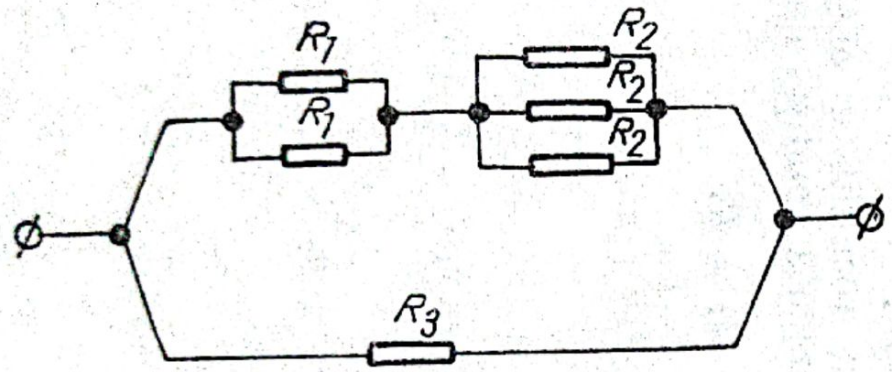
3.4.26. a) $E_e = E_1 + \ldots + E_n$; $\quad r_e = r_1 + \ldots + r_n$;

b) $E_e = \dfrac{g_1 E_1 + \ldots + g_m E_m}{g_1 + \ldots + g_m}$, $g_e = g_1 + g_2 + \ldots + g_m$,

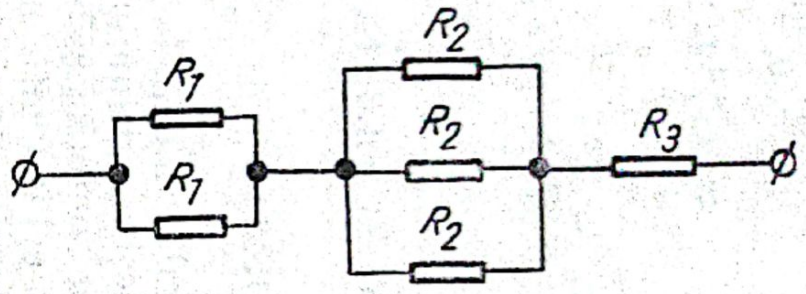
cu $g = \dfrac{1}{r}$.

c) $I = \dfrac{E_e}{r_e + R}$.

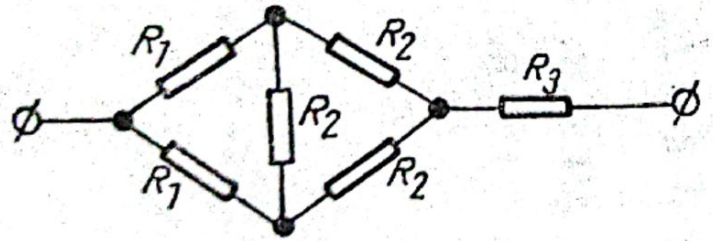
Scanned with OKEN Scanner



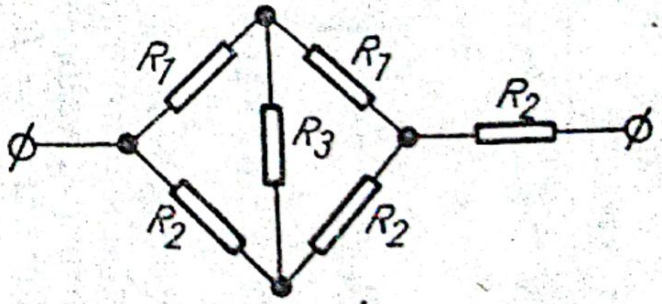
a



b



c



d

Fig. 3.4.24. R.

Scanned with OKEN Scanner

3.4.27. Legare în serie și în același sens : $E_{e_1} = E_1 + E_2 = 8$ V, $r_{e_1} = r_1 + r_2 = 0{,}35\ \Omega$; 2) În serie dar în sensuri opuse : $E_{e_2} = E_2 - E_1 = 4$ V, $r_{e_2} = 0{,}35\ \Omega$.

3) În paralel și în același sens :

$$E_{e_3} = \frac{g_1E_1 + g_2E_2}{g_1 + g_2} = \frac{20 + 24}{14} = \frac{22}{7}\text{ V},$$

$$r_{e_3} = \frac{r_1r_2}{r_1 + r_2} = \frac{1}{14}\ \Omega ;$$

4) În paralel dar în sensuri opuse :

$$E_{e_4} = \frac{24 - 20}{14} = \frac{2}{7}\text{ V}, \quad r_{e_4} = \frac{1}{14}\ \Omega.$$

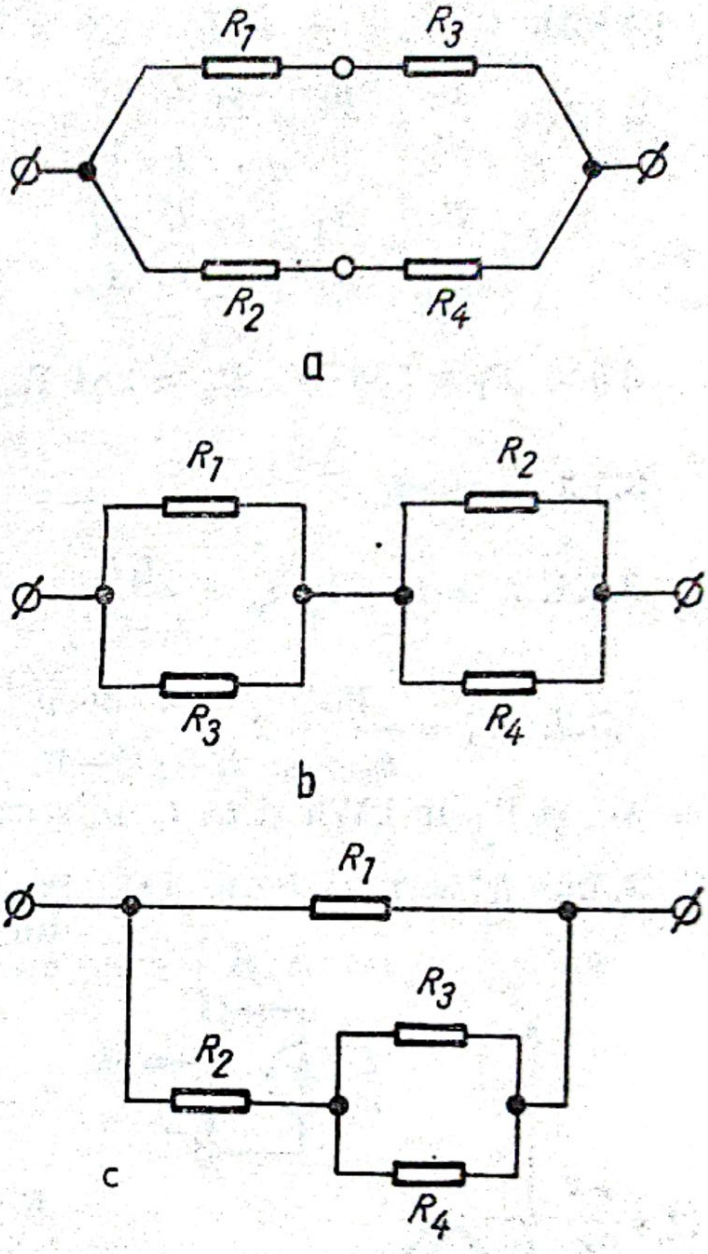


Fig. 3.4.25. R.

3.4.28. Sursa dată are $E = U_g = 12$ V, $r = \frac{E}{I_{sc}} = 0{,}5\ \Omega$.

Sursa echivalentă are parametrii :

a) $E_e = 12$ V, $r_e = r + R = 1{,}5\ \Omega$;

b) $E_e = \frac{gE}{g + G} = \frac{2 \cdot 14}{2 + 1} \cdot \frac{24}{3} = 8$ V, $r_e = \frac{Rr}{R + r} = \frac{1}{3}\ \Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

3.4.29. $R_e = R$.

3.5.1. a) $\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{L_1}{L_2}\frac{A_2}{A_1}$;

b) $\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{L_2}{L_1}\frac{A_1}{A_2}$.

3.5.2. $P_1 \approx 538$ W, $P_2 \approx 284$ W, $\Delta P = -\frac{34}{970}\,100 = -4{,}5\%$.

3.5.3. $\eta \approx 80\%$.

3.5.4. $t_s = t_1 + t_2$, $t_p = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}$.

3.5.5. $W_1 = \frac{V_{\text{lei}}}{c_{\text{lei/kWh}}}\,2\,\frac{24 \cdot 3600}{t_s + \sqrt{t_s^2 - 4t_s t_p}}$; $W_2 = \frac{V_{\text{lei}}}{c_{\text{lei/kWh}}}\,2\,\frac{24 \cdot 3600}{t_s - \sqrt{t_s^2 - 4t_s t_p}}$,

cu W_1 și W_2 în kWh și t_s, t_p în secunde.

3.5.6. $R' = 1\ \Omega \cdot R'' = 3\ \Omega$. Punctele A și B cuprind între ele un arc de cerc de 90°.

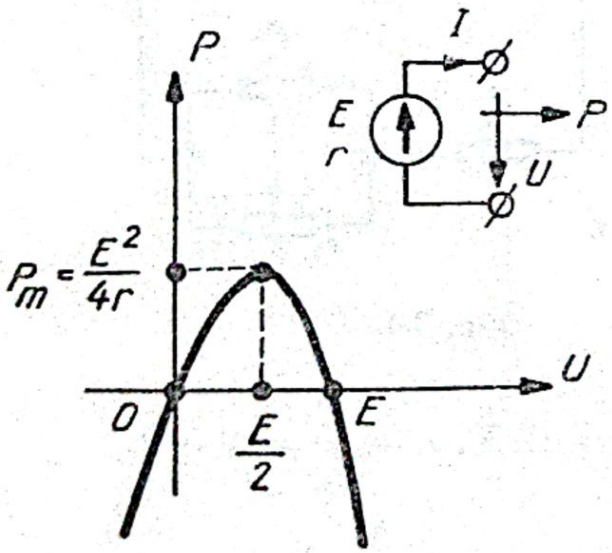


Fig. 3.5.10. R.

3.5.7. $U_m = 6$ V, $P_m = 12$ W.

3.5.8. 17300 lei, $\eta = 95\%$.

3.5.9. $E = 8$ V, $U = 7{,}5$ V, $R = 11{,}4\ \Omega$.

3.5.10. $P = \frac{1}{r}(E - U)\,U$.

Funcția $P = f(U)$ are un maxim la $U = \frac{E}{2}$. Valoarea acestui maxim este $P_m = \frac{E^2}{4r}$. Randamentul corespunzător este $\eta = \frac{1}{2}$. Graficul funcției este parabola reprezentată în figura alăturată. Puterea dată negativă ($P < 0$) reprezintă o putere primită.

Scanned with OKEN Scanner

3.5.11. Puterea dată de o sursă rezistorului legat la bornele ei are expresia

$$P = RI^2 = \frac{R}{(R+r)^2} E^2 \tag{1}$$

La E și r dați această putere este o funcție de rezistența R a receptorului. Maximul acestei puteri se obține la o rezistență R_m care anulează derivata puterii P în raport cu rezistența R

$$\frac{dP}{dR} = E^2 \frac{(R+r)^2 - 2(R+r)R}{(R+r)^4} = E^2 \frac{r-R}{(R+r)^3}. \tag{2}$$

Ecuația

$$\frac{dP}{dR} = 0 \tag{3}$$

are rădăcina

$$R_m = r. \tag{4}$$

Derivata $\frac{dP}{dR}$ este pozitivă pentru $R < r$, negativă pentru $R > r$ și nulă pentru $R = r$. Ca urmare funcția $P(R)$ are un maxim

$$P_m = \frac{E^2}{4r}. \tag{5}$$

pentru $R_m = r$. Cu alte cuvinte, orice sursă dă în exterior o putere maximă (5) atunci cînd se leagă la bornele ei un rezistor de rezistență egală cu rezistența internă a sursei (4).

3.5.12. Puterea dată de sursă unui rezistor legat la bornele ei are expresia cunoscută

$$P = RI^2,$$

cu

$$I = \frac{E}{r+R}.$$

De aici rezultă

$$P = \frac{R}{(r+R)^2} E^2. \tag{1}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ultima relație se poate deduce R în funcție de E, r și P. Astfel se obține ecuația

$$(r+R)^2=\frac{E^2}{P}R \quad \text{sau} \quad R^2+2\left(r-\frac{E^2}{2P}\right)R+r^2=0. \tag{2}$$

Rezolvînd ultima ecuație rezultă

$$R=\left(\frac{E^2}{2P}-r\right)\pm\sqrt{\left(\frac{E^2}{2P}-r\right)^2-r^2}$$

sau

$$R=\left(\frac{E^2}{2P}-r\right)\pm\sqrt{\frac{E^2}{P}\left(\frac{E^2}{4P}-r\right)}. \tag{3}$$

Din relațiile (1) și (3) se observă că valori reale și pozitive pentru R se obțin numai dacă puterea dată satisface condițiile

$$0\leqslant P\leqslant\frac{E^2}{4r}=P_m. \tag{4}$$

Cu alte cuvinte, problema are soluție (fizic acceptabilă) numai dacă puterea dată (P) este pozitivă și mai mică sau egală cu puterea maximă P_m ce o poate da sursa. Există două rezistențe care corespund unei puteri date P ce satisface inegalitățile din (4). Aceste rezistențe notate cu R_1, R_2, satisfac, conform cu (2), relațiile

$$\sqrt{R_1R_2}=r, \tag{5}$$

și

$$R_1+R_2=\frac{E^2}{P}-2r. \tag{6}$$

Relația (5) arată că rezistențele a căror medie geometrică este egală cu rezistența internă a sursei iau de la aceasta puteri egale.

3.5.13. a) $E=\sqrt{P}(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2})=20{,}2$ V; $r=\sqrt{R_1R_2}=1\Omega$, $I_{sc}=\sqrt{P}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1}}+\frac{1}{\sqrt{R_2}}\right)=2\,(10+0{,}1)=20{,}2$ A; b) $P_m=\frac{E^2}{4r}=\frac{20{,}2^2}{4}\approx 102$ W pentru $r_m=1\,\Omega$; c) $\eta=\frac{R}{r+R}=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$, $U=\frac{R}{R+r}E=\eta E\approx 13{,}5$ V.

Scanned with OKEN Scanner

3.5.14. $P_{1m} = P_{2m} = 728$ W.

3.5.15. (a) $U_{g,s} = 2U_g$, $I_{sc,p} = I_{sc}$, $P_{m,s} = \frac{U_{g,s}}{2}\frac{I_{sc,s}}{2} = \frac{2U_g}{2}\frac{I_{sc}}{2} = 2P_m$;

b) $U_{g,p} = U_g$, $I_{sc,p} = 2I_{sc}$, $P_{m,p} = \frac{U_{g,p}}{2}\frac{I_{sc,p}}{2} = \frac{2U_g}{2}\frac{I_{sc}}{2} = 2P_m$.

3.5.16. Se deduc întîi relaţiile $P_m = \frac{1}{4} r I_{sc}^2$, $P_m = \frac{1}{4} E I_{sc}$ şi $r = \frac{P_m}{I_{sc}^2}$, $E = \frac{4P_m}{I_{sc}}$. Prima sursă are deci parametrii

$$r_1 = 4\frac{P_m}{I_{sc,1}^2}, \quad E_1 = 4\frac{P_{m1}}{I_{sc,1}}, \tag{1}$$

iar a doua sursă

$$r_2 = 4\frac{P_{m2}}{I_{sc,2}^2}, \quad E_2 = 4\frac{P_{m2}}{I_{sc,2}}. \tag{2}$$

La legarea în serie

$$E_e = E_1 + E_2 = 4\left(\frac{P_{m1}}{I_{sc,1}} + \frac{P_{m2}}{I_{sc,2}}\right).$$

$$r_e = r_1 + r_2 = 4\left(\frac{P_{m1}}{I_{sc,1}^2} + \frac{P_{m2}}{I_{sc,2}^2}\right). \tag{3}$$

şi deci

$$I_{sc,s} = \frac{E_e}{r_e} = \frac{I_{sc,2}\ P_{m1} + I_{sc,1}\ P_{m2}}{I_{sc,2}^2\ P_{m1} + I_{sc,1}^2\ P_{m2}}\ I_{sc,1}\ I_{sc,2}, \tag{4}$$

$$P_{m,s} = \frac{E_e^2}{4r_e} = \frac{(I_{sc,2}\ P_{m1} + I_{sc,1}\ P_{m2})^2}{I_{sc,2}^2\ P_{m1} + I_{sc,1}^2\ P_{m2}}. \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

La legarea în paralel

$$E_e = \frac{\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{I_{sc,1} + I_{sc,2}}{g_1 + g_2} = 4\,\frac{I_{sc,1} + I_{sc,2}}{\frac{I^2_{sc,1}}{P_{m1}} + \frac{I^2_{sc,2}}{P_{m2}}} =$$

$$= 4\,\frac{I_{sc,1} + I_{sc,2}}{I^2_{sc,2}\,P_{m1} + I^2_{sc,1}\,P_{m2}}\,P_{m1}\,P_{m2};$$

$$r_e = 4\,\frac{\frac{P_{m1}\,P_{m2}}{I^2_{sc,1}\,I^2_{sc,2}}}{\frac{P_{m1}}{I^2_{sc,1}} + \frac{P_{m2}}{I^2_{sc,2}}} = 4\,\frac{P_{m1}\,P_{m2}}{I^2_{sc,2}\,P_{m1} + I^2_{sc,1}\,P_{m2}} \qquad (6)$$

și deci $I_{sc,p} = I_{sc,1} + I_{sc,1}$, (7)

$$P_{m,p} = \frac{(I_{sc,1} + I_{sc,2})^2}{I^2_{sc,2}\,P_{m1} + I^2_{sc,1}\,P_{m2}}\,P_{m1}\,P_{m2}. \qquad (8)$$

a) În cazul surselor cu aceiași curenți de scurtcircuit rezultă

$$I_{sc,s} = I_{sc}, \qquad P_{m,s} = P_{m1} + P_{m2};$$

$$I_{sc,p} = 2\,I_{sc}, \qquad P_{m,p} = \frac{4\,P_{m1}\,P_{m2}}{P_{m1} + P_{m2}}.$$

b) În cazul surselor cu aceeași putere utilă maximă

$$I_{sc,s} = \frac{I_{sc,1} + I_{sc,2}}{I^2_{sc,1} + I^2_{sc,2}}\,I_{sc,1}\,I_{sc,2}, \quad P_{m,s} = \frac{(I_{sc,1} + I_{sc,2})^2}{I^2_{sc,1} + I^2_{sc,2}}\,P_m;$$

$$I_{sc,p} = I_{sc,1} + I_{sc,2} \qquad P_{m,p} = \frac{(I_{sc,1} + I_{sc,2})^2}{I^2_{sc,1} + I^2_{sc,2}}\,P_m.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.5.17.

$$\eta_s = \frac{1}{\frac{1}{\eta_1}+\frac{1}{\eta_2}-1} = \frac{1}{\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-1} = \frac{6}{11}, \quad \eta_{s\%} = 54{,}5\%;$$

$$\eta_p = \frac{\eta_1+\eta_2-2\eta_1\eta_2}{1-\eta_1\eta_2} = \frac{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}-2\frac{3}{4}\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{4}\frac{2}{3}} = \frac{5}{6};$$

$$\eta_{p\%} = 83{,}3\%$$

3.5.18. $R = r, \quad P = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \frac{E^2}{r}.$

3.5.19. $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R, \quad \frac{P}{P_{max}} = 4\,(5\sqrt{6}-12).$

3.5.20. $\frac{I_1}{I_2} = \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}, \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}.$

3.5.21. $\frac{U_1}{U_2} = \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}, \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}\frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}.$

3.5.22. Puterea primită de un circuit din exterior are expresia $P = UI$, în care U și I sînt valori corespunzătoare unui aceluiași sens de referință ales în lungul conductorului. Se începe rezolvarea problemei prin calculul tensiunii și se trece apoi la calculul curenților. Tensiunea între cele două borne ale circuitului derivație este dată de formula cunoscută

$$U = \frac{\sum_{k=1}^{m} G_k E_k}{\sum_{k=1}^{m} G_k} = \frac{2\cdot 12+\frac{3}{2}6}{2+\frac{3}{2}+\frac{5}{8}} = 8\ \text{V}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Intensitatea curentului din elementele circuitului este dată de legea lui Ohm generalizată

$$I_1 = \frac{E_1 - U}{r_1} = 2\,(12 - 8) = 8\ \text{A}, \quad I_2 = \frac{-E_2 + U}{r_2} = 3\ \text{A}, \quad I_3 = 5\ \text{A}.$$

Verificarea valorilor calculate se face simplu cu ajutorul primei teoreme a lui Kirchhoff: $I_1 = I_2 + I_3$.

Puterea dată în exterior de primul acumulator este $P_1 = UI_1 = 64$ W. Puterea primită de receptor este $P = RI^2 = UI = 40$ W. Puterea primită de la al doilea acumulator este $P_2 = UI_2 = 24$ W (acest acumulator se încarcă). O a doua verificare a calculului se poate face pe baza legii de conservare a energiei, respectiv a puterilor corespunzătoare. Puterea dată de unele elemente ale unui circuit este egală cu puterea primită de celelalte elemente ale circuitului. În cazul circuitului considerat $P_1 = P + P_2$.

3.5.23. a) $P_{2,\,dat} > 0$ pentru $U \in (0\,;\,6)$ respectiv $R \in (0\,;\,0{,}5)$; b) $P_{2,\,dat} = 0$, pentru $U = 0$ (adică la scurtcircuit $R = 0$) și $U = 6$ V (adică atunci cînd sursa nu debitează curent, ceea ce se realizează la $R = 0{,}5\ \Omega$); c) $P_{2,\,dat} < 0$ și deci sursa primește putere (acumulatorul 2 se încarcă) pentru $U \in (6\,;\,9{,}45)$ adică pentru $R \in (0{,}5\,;\,\infty)$. Cea mai mare putere ce o dă sursa 2 este $P_{2,\,dat\,max} = 13{,}5$ W, la $U = 3$ V respectiv $R = 0{,}134\ \Omega$. Cea mai mare putere ce o primește sursa este $P_{2,\,primit,\,max} = 50$ W, la $R = \infty$, adică atunci cînd circuitul este format numai din cele două surse legate în serie.

3.5.24.

	a)	b)	c)	d)	e)
I (A)	48	24	12	0	− 12
U (V)	− 12	0	6	12	18
P (W)	−576	0	72	0	−216
P_p (W)	1152	288	72	0	72
Felul puterii	primită de la o sursă exterioară		cedată		primită de la o sursă exterioară.
Observații:	acumulatorul se descarcă deși primește putere pe la borne	scurt-circuit	mers în gol	acumulatorul se încarcă (acumulează energie).	

Scanned with OKEN Scanner

3.5.25. $P_2 \approx 17{,}5$ W, $P_1 = -16{,}3$ W, $P_3 = 34{,}2$ W. Suma acestor puteri este egală cu suma puterilor primite de rezistoarele R_1, R_2, R_3; $P_m = 3$ W la $R_m = 0{,}386\ \Omega$.

3.6.1.

$$\text{a)} \quad R_{e1} = R_{e2} = \frac{2}{3} R_{bec.1} = \frac{2}{3} \frac{U^2}{P} \approx 80{,}6\ \Omega.$$

b) Primul mod (deoarece arderea unuia din becurile în derivație este urmată de o nouă repartizare a tensiunii totale U, care ar produce

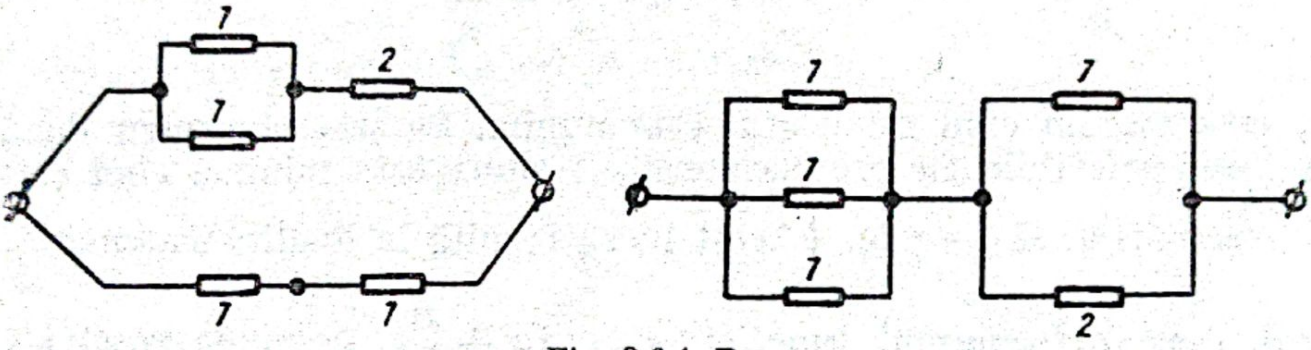


Fig. 3.6.1. R.

în al doilea mod de conectare arderea a două becuri de 100 W, iar în primul mod de conectare arderea numai a unui bec).

3.6.2.

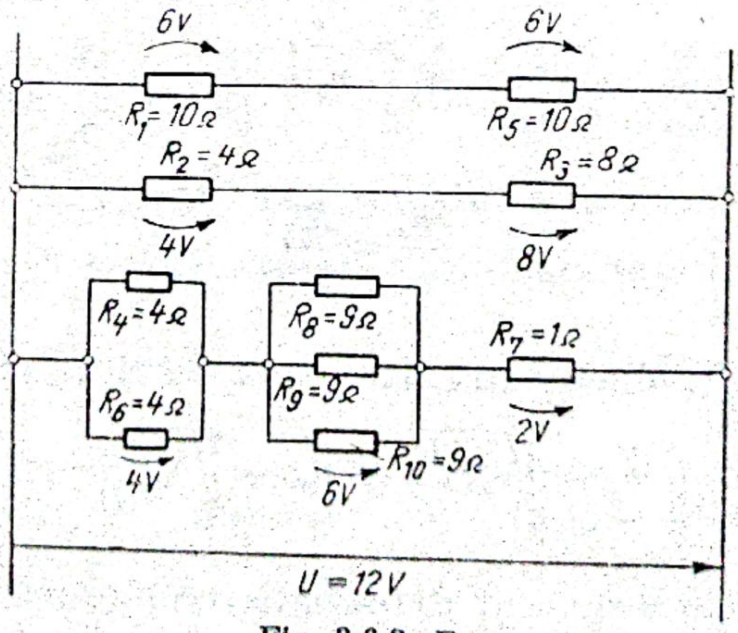


Fig. 3.6.2. R.

3.6.3. Dacă $R > r$ în serie, dacă $R < r$ în paralel, dacă $R = r$ se obține același rezultat la legarea în serie sau paralel. În cazul considerat, legarea în serie dă $P = 36$ W.

Scanned with OKEN Scanner

3.6.4. a) Puterea primită de un rezistor R avînd expresia $P = RI^2$, se observă că, la R dat, această putere este maximă cînd I este maxim. De aici rezultă că problema de la punctul a) se reduce la determinarea extremului curentului I. Acest curent se obține înlocuind bateria cu o sursă echivalentă cu t.e.m. $E_e = n_s E$ și rezistența internă $r_e = \frac{n_s}{n_p} r$. Astfel rezultă

$$I = \frac{n_s E}{\frac{n_s}{n_p} r + R} = \frac{E}{\frac{r}{n_p} + \frac{R}{n_s}}, \tag{1}$$

I este maxim cînd numitorul este minim. Se știe că pentru două mărimi variabile cu produs constant suma este minimă cînd cele două mărimi sînt egale. (Acest lucru rezultă în analiza matematică calculînd extremumul funcției $y = Ax + \frac{B}{x}$, de unde rezultă y maxim pentru x dat de condiția $Ax = \frac{B}{x}$, care implică $x = \pm \sqrt{\frac{B}{A}}$.) În cazul expresiei (1) maximul se obține deci pentru

$$\frac{r}{n_p} = \frac{R}{n_s}, \tag{2}$$

adică pentru

$$\frac{n_s}{n_p} = \frac{R}{r}, \tag{3}$$

Din relația (3) și din relația dată $n_s n_p = N$ se obțin valorile

$$n_s = \sqrt{N \frac{R}{r}} \text{ și } n_p = \sqrt{N \frac{r}{R}} \tag{4}$$

pentru care curentul și deci puterea dată receptorului R este maximă. Această putere maximă are expresia

$$P_m = RI_m^2 = R \frac{n_s^2 E^2}{(2R)^2} = \frac{NE^2}{4r}. \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru valorile numerice din enunț rezultă

$$n_s = 16, \quad n_p = 4, \quad P_m = 28{,}8\ \text{W}.$$

b) Pentru o conexiune dată a surselor (cu n_p grupe în paralel, fiecare grupă fiind formată din n_s surse în serie) puterea dată unui rezistor R este maximă cînd acest rezistor are valoarea

$$R = \frac{n_s}{n_p} r \tag{6}$$

Această putere maximă are o valoare

$$P_m = \frac{(n_s E)^2}{4 \dfrac{n_s}{n_p} r} = \frac{NE^3}{4r}, \tag{7}$$

care este independentă de n_s și n_p. Ca urmare, pentru oricare din conexiunile cu $n_s n_p = N$ se obține aceeași putere maximă (7). În funcție de valorile n_s și n_p se modifică însă rezistența R, dată de (6), care corespunde maximului puterii.

Pentru valorile numerice date puterea maximă se realizează la oricare din valorile lui R date mai jos

$$R = \frac{64}{1} r, \quad \frac{32}{2} r, \quad \frac{16}{4} r, \quad \frac{8}{8} r, \quad \frac{4}{16} r, \quad \frac{2}{32} r, \quad \frac{1}{64} r.$$

În oricare din aceste cazuri randamentul este $\eta = 50\%$ și deci și puterile, la fel ca și curenții surselor, sînt aceleași $\left(P_{\text{sursă}} = \dfrac{E^2}{4r} \right.$ — puterea maximă pentru fiecare sursă separat și $\left. I_{\text{sursă}} = \dfrac{E}{2r} \right)$.

3.6.5. N = 36 acumulatoare. Se vor lega în paralel trei grupuri de acumulatoare, formate fiecare din cîte 12 acumulatoare legate în serie.

3.6.6. a) Grupul de șase tuburi conectate în paralel se leagă în serie cu o rezistență adițională

$$R = \frac{220\ \text{V} - 6\text{V}}{2(0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3)} = \frac{114}{1{,}2} \approx 95\ \Omega;$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Tuburile T_3, luînd fiecare un curent de 0,3 A, cu ele se pot lega în serie: T_2 legat în paralel cu un șunt $R_2 = \frac{6\text{V}}{0{,}1\text{ A}} = 60\ \Omega$, tubul T_1 legat în paralel cu un șunt $R_3 = \frac{6\text{V}}{0{,}2\text{ A}} = 30\ \Omega$. Rezistența adițională din circuitul serie este $R_0 = \frac{220\text{ V} - 36\text{ V}}{0{,}3\text{ A}} = 613\ \Omega$;

c) $P_a = 264$ W, $P_b = 66$ W. Din punctul de vedere al puterii necesare e de preferat soluția de la punctul b).

3.6.7. $I_{sc} = \sqrt{P}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}\right)$; $U = \sqrt{P}\ \ (\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})$, $U_1 = \sqrt{R_1 P}$, $U_2 = \sqrt{R_2 P}$.

3.6.8. $P_{m2} = \frac{U(U_1 - U_2)}{U_2(U - U_1)} P_{n1} = 11$ kW.

3.6.9. $x = \frac{\beta - 1}{\beta - \alpha}\left(L + \frac{R_0}{2R'}\right)$; $R = \frac{\beta(\alpha - 1)}{(\alpha - \beta)^2}(2R'L + R_0)$.

3.6.10. $A = \frac{100 - \Delta u_{\%}}{\Delta u_{\%}}(2L)\rho\frac{P}{U^2} = 27{,}8\ \text{mm}^2$;

$$P' = \frac{nP}{\left(1 + \frac{\Delta u_{\%}}{100 - \Delta u_{\%}} n\right)^2} = 826\text{ kW}.$$

3.6.11. a) $I = 36{,}11$ A, $U_{AB} = 16{,}67$ V; b) $I_{sc} \approx 5{,}56$ A, $\Delta I \approx 0{,}92$ A, c) $3610\text{ W} \approx 2 \cdot 25^2 + 2 \cdot 25^2 + 6 \cdot 11{,}1^2 + 3 \cdot 11{,}1^2 \approx 3610$ W;

3.6.12. a) $I = 1$A; b) $U_{BA} = 5$ V, $U_{BC} = 5$ V, $U_{CD} = 3$ V, $U_{CA} = 10$ V, $U_{BD} = -2$ V; c) $E_1 I + E_2 I - E_4 I = R_1 I^2 + R_3 I^2 \Leftrightarrow 10\text{ W} = 1\text{W} + 1\text{W} + 3\text{W} + 5\text{W}$, $U_{BA} I + U_{CB} I + U_{DC} I + U_{AD} I = 0 \approx 5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + (-7) \cdot 1$; d) $E = 2{,}4\ \Omega$, $P_m = \frac{5}{12}$ W. e) $I_{sc} = \frac{5}{6}$ A.

3.6.13. $I \approx 0{,}1$A, $R = 300\ \Omega$, $U = 300{,}3$ V, $P_R = 3$ W, $P_A = 3$ mW.

Scanned with OKEN Scanner

3.6.14. a) $R = \frac{r}{3} = 1\ \Omega$; b) $U_0 = \frac{E}{2r} \quad \frac{R(R+r)}{2R+r} \quad \frac{r}{R+r} =$

$= \frac{R}{2R+r} \quad \frac{E}{2} = \frac{5}{2+\sqrt{3}}\ \Omega.$

3.6.15. $\alpha = \eta^2$ — pătratul randamentului liniei care alimentează receptorul;

$$P = \frac{P_0}{n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\eta}-1\right)^2}\ ;\ U_n = \frac{U}{1+n\left(\frac{1}{\eta}-1\right)}.$$

3.6.16. a) $U_2 = U - U_1$, $I = U_2 R_2^{-1}$, $R_1 = U_1 I^{-1}$, $R_e = R_1 + R_2$, $P = UI$; b) $U = PI^{-1}$, $U_1 = R_1 I$, $U_2 = U - U_1$, $R_2 = U_2 I^{-1}$;

c) Se rezolvă ecuaţia $P(U_1 + U_2)^{-1} = U_2 R_2^{-1}$ şi se găseşte U_2. Apoi din aproape în aproape: $I = U_2 R_2^{-1}$, $U = PI^{-1}$, $U_1 = U - U_2$, $R_1 = U_1 I^{-1}$, $P_1 = R_1 I^2$;

d) Se rezolvă ecuaţia $P_2 = (U - U_1)\frac{U_1}{R_1}$ în raport cu U_1. Apoi $I = U_1 R_1^{-1}$, $P_1 = U_1 I$, $R_2 = U_2 I^{-1}$.

3.6.17. a) $I_2 = UR_2^{-1}$, $I = I_1 + I_2$, $P = UI$, $R_1 = UI_1^{-1}$;

b) Se rezolvă în raport cu I_1 ecuaţia $\frac{P_1}{I_1} = R_e(I_1 + I_2)$.

Apoi: $I = I_1 + I_2$, $U = R_e I$, $R_1 = \frac{U}{I_1}$, $R_2 = \frac{U}{I_2}$;

c) Se rezolvă ecuaţia $P = U\left(I_1 + \frac{U}{R_2}\right)$ în raport cu U. Mai departe: $I = I_1 + \frac{U}{R_2}$, $R_1 = \frac{U}{I_1}$, $R_e = \frac{U}{I}$;

d) Se rezolvă ecuaţia: $\frac{P_1}{U} + \frac{U}{R_2} = I$, în raport cu U. Apoi: $I_2 = \frac{U}{R_2}$, $P_2 = UI_2$, $I_1 = I - I_2$, $R_1 = \frac{U}{I_1}$, $P = UI$.

3.6.18. a) $U_2 = U_3 = P_2 I_2^{-1}$, $I_3 = U_2 R_3^{-1}$, $I_2 = I_2 + I_3$, $U_1 = R_1 I_1$, $U = U + U_{23}$, $R_e = UI_1^{-1}$;

Scanned with OKEN Scanner

b) Se rezolvă ecuația $U = R_2 I_2 + \dfrac{P_1}{I_2 + I_3}$ obținîndu-se I_2. Mai departe: $U_1 = U_2 = R_2 I_2$, $U_1 = U - U_2$, $I_1 = \dfrac{P_1}{U_1}$, $P = UI_1$.

3.6.19. a) $U_2 = R_2 I - E_2$, $U_1 = U - U_2$, $R = U_1 I^{-1}$;

b) $U_1 = U - U_2$, $I = \pm \sqrt{P_E R_2^{-1}}_1$ $R_1 = U_1 I^{-1}$, $E_2 = R_2 I - U_2$;

c) Se calculează intensitatea curentului rezolvînd ecuația $E_2 - R_2 I = -\dfrac{P_2}{I}$. Celelalte mărimi rezultă din relațiile $U_2 = R_2 I - E_2$, $U_1 = U - U_2$, $R_e = \dfrac{U}{I}$.

3.6.20. $P_m = \dfrac{E^2}{4r} = \dfrac{U_g I_{sc}}{4}$, $P = UI = \left(E - r\,\dfrac{E \pm \frac{E}{2}}{3r}\right) \cdot \dfrac{E \pm \frac{E}{2}}{3r} =$

$= \dfrac{E^2}{r}\left[1 - \dfrac{1}{3}\left(1 \pm \dfrac{1}{2}\right)\right] \cdot \dfrac{1 \pm \frac{1}{2}}{3}$. Semnul de sus corespunde legării cu t.e.m. în același sens, iar cel de jos legării în opoziție:

$P_1 = \dfrac{E^2}{r}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2} = \dfrac{E^2}{4r} = P_m$, $P_2 = \dfrac{E^2}{r}\,\dfrac{5}{6}\,\dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{9} P_m$, cu P_m puterea utilă maximă a primei surse.

3.6.21. $I_A = 0{,}86$ A; $I = 1$ A; $\Delta I = -0{,}14$ A, $\gamma = -0{,}14$, $\gamma_{\%} = -14\%$.

3.6.22. 1) $u_{aa} = 0$, $U_{ab} = \dfrac{U}{2} = 5$ V, $u_{ac} = \dfrac{3}{4} U = 7{,}5$ V, $U_{ad} = U = 10$ V;

2) $u'_{aa} = 0$, $u'_{ab} = \dfrac{U}{R_2 + \dfrac{R_1 R}{R_1 + R}} \cdot \dfrac{R_1 R}{R_1 + R} =$

$= \dfrac{R_1 R}{R_1 R_2 + R_2 R + R R_1} U = \dfrac{U}{750}\,250 = \dfrac{U}{3} \approx 3{,}33$ V, $u'_{ac} = \dfrac{6}{11} U =$

$= 5{,}56$ V, $u'_{ad} = U = 10$ V;

Scanned with OKEN Scanner

3) $u''_{aa} = 0$, $u''_{ab} = \dfrac{U}{R_2 + \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R_v}\right)^{-1}} = 3{,}2$ V, $u''_{ac} = 5{,}29$ V,

$u''_{ad} = U = 10$ V.

3.6.23. a) $U = 124{,}8$ V; b) $P = 1{,}248$ kW;

c) $R_e = 312\ \Omega$; d) $\eta = \dfrac{P}{P + R_1 I^2 + R_e I_e^2} = \dfrac{UI}{EI_1} = \dfrac{124{,}8 \cdot 10}{130 \cdot 10{,}4} \approx$

$\approx 0{,}92$.

3.6.24. a) $R = 40\ \Omega$, b) 1,35 l, c) 8,37 bani.

3.6.25. $U_k = R_k U \left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right)^{-1} = \dfrac{\varepsilon_k \rho_k}{C_k} \left(\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\varepsilon_j \rho_j}{C_j}\right)^{-1} U$,

cu R_K rezistența dielectricului (izolației) condensatorului k;

$$Q_k = C_k U_k = \varepsilon_k \rho_k \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j \rho_j}{C_j}\right)^{-1} U.$$

3.6.26. a) $E \approx 2$mV, b) $E' \approx 40\ \mu$V/grd.

3.6.27. Degajarea de căldură prin efect Joule produce o creștere a energiei interne a conductorului și corespunzător o creștere a temperaturii acestuia. Conductorul mai cald (cu temperatura θ) mai ridicată decît mediul ambiant cedează căldură mediului ambiant prin suprafața sa laterală de arie A. Cantitatea de căldură astfel cedată este proporțională cu aria prin care se face transmisia căldurii, cu diferența de temperatură $\theta - \theta'$ și cu timpul t:

$$Q = kA\,(\theta - \theta')\,t \qquad (1)$$

unde coeficientul de proporționalitate k se numește coeficient de transmisie a căldurii.

Temperatura conductorului crește pînă ce ajunge la o valoare constantă (staționară) θ_s, la care căldura cedată Q este egală, în orice interval de timp, cu căldura degajată prin efect Joule

$$kA\,(\theta_s - \theta')\,t = RI^2 t. \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezistența R este însă funcție de temperatura θ_s

$$R = R_0 [1 + \alpha (\theta_s - \theta_0)]. \tag{3}$$

Folosind legea lui Ohm se elimină necunoscuta I din ecuația (2) obținîndu-se

$$kA (\theta_s - \theta') = \frac{U^2}{R_0 [1 + \alpha (\theta_s - \theta_0)]}. \tag{4}$$

Din ultima ecuație rezultă

$$\theta_s = \frac{1}{2}\left[\theta' + \theta_0 - \frac{1}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\theta' - \theta_0 + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + 4\frac{U^2}{R_0 kA\,\alpha}}\right]. \tag{5}$$

$$R_{\theta_s} = R_0 [1 + \alpha (\theta_s - \theta_0)] \tag{6}$$

și

$$I = \frac{U}{R_{\theta_s}}.$$

3.6.28. a) $r = \dfrac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2}$, $\quad E = \dfrac{U_2 I_1 - U_1 I_2}{I_1 - I_2}$;

b) $r = \dfrac{U_2 - U_1}{U_1 R_2 - U_2 R_1} R_1 R_2$, $\quad E = \dfrac{R_2 - R_1}{U_1 R_2 - U_2 R_1} U_1 U_2$;

c) $r = \dfrac{U_2 - U_1}{U_2 P_1 - U_1 P_2} U_1 U_2$, $\quad E = \dfrac{U_2^2 P_1 - U_1^2 P_2}{U_2 P_1 - U_1 P_2}$;

d) $r = \dfrac{R_2 I_2 - R_1 I_1}{I_1 - I_2}$, $\quad E = \dfrac{R_2 - R_1}{I_1 - I_2} I_1 I_2$;

e) $r = \dfrac{\sqrt{R_2 P_2} - \sqrt{R_1 P_1}}{\sqrt{R_2 P_1} - \sqrt{R_1 P_2}} \sqrt{R_1 R_2}$ $\quad E = \dfrac{R_2 - R_1}{\sqrt{R_2 P_1} - \sqrt{R_1 P_2}} \sqrt{P_1 P_2}$;

f) $r = \dfrac{P_2 I_1 - P_1 I_2}{I_1 I_2 (I_1 - I_2)}$, $\quad E = \dfrac{P_2 I_1^2 - P_1 I_2^2}{I_1 I_2 (I_1 - I_2)}$.

Scanned with OKEN Scanner

3.6.29. Curentul de scurtcircuit nu depinde de regim.

a) $\eta_1 = \dfrac{U_1(I_1 - I_2)}{I_1U_2 - I_2U_1}$,

b) $\eta_1 = \dfrac{I_1 I_2 (I_1 - I_2)}{P_2 I_1^2 - P_1 I_2^2}$,

$I_{sc,1} = \dfrac{U_2^2 P_1 - U_1^2 P_2}{U_1 U_2 (U_2 - U_1)}$;

c) $\eta_1 = \dfrac{U_1(P_1U_2 - P_2U_1)}{P_2U_1^2 - P_1U_2^2}$

$I_{sc,1} = \dfrac{I_1U_2 - I_2U_1}{U_2 - U_1}$,

$I_{sc,1} = \dfrac{P_2I_1^2 - P_1I_2^2}{P_2I_1 - P_1I_2}$.

3.6.30. $R = r\left[2\left(\dfrac{P_m}{P}\right) - 1 \pm 2\sqrt{\dfrac{P_m}{P}\left(\dfrac{P_m}{P} - 1\right)}\right]$, $I = \sqrt{\dfrac{P}{R}}$,

$U = \sqrt{PR}$.

Discuţie. Rezultă valori reale numai pentru $P \leqslant P_m$, unde $P_m = \dfrac{E^2}{4r}$ este puterea utilă maximă a sursei. În acest caz relaţiile de mai sus arată că există o soluţie sau două soluţii acceptabile adică două valori ale lui R, I şi U) după cum una sau ambele valori obţinute pentru R sînt pozitive. Cînd $P = P_m$ există o singură soluţie.

3.6.31. a) $R_1R_2 = r^2$; b) $I_1 + I_2 = I_{sc}$; c) $I_1I_2 = \dfrac{P_0}{r}$;

d) $U_1 + U_2 = U_0$; e) $U_1U_2 = Pr$; f) $U_1 = rI_2$.

3.6.32. Considerînd parametrii sursei E şi r constanţi şi rezistenţa R variabilă, expresiile analitice cerute sînt:

a) $I = \dfrac{E}{R+r}$, $U = \dfrac{ER}{R+r}$,

$P = \dfrac{E^2R}{(R+r)^2}$, $\eta = \dfrac{R}{R+r}$, $R \in [0,\infty)$;

b) $U = E - rI$, $P = (E - rI)I$,

$\eta = \dfrac{E - rI}{E}$; $I \in \left(0, \dfrac{E}{r}\right]$;

c) $P = \dfrac{(E-U)U}{r}$, $\eta = \dfrac{U}{E}$; $U \in [0, E)$;

d) $\eta = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4rP/E^2}}{2}$, $\eta \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$; $P \in \left[0, \dfrac{E^2}{4r}\right]$

$\eta = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4rP/E^2}}{2}$, $\eta \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$; $P \in \left(0, \dfrac{E^2}{4r}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

4.1.1. $H = \dfrac{I}{2\pi r} = 15{,}9$ A/m.

4.1.2. Aplicînd principiul superpoziției, se calculează $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$, unde $\vec{H}_1$ și $\vec{H}_2$ sînt intensitățile cîmpurilor magnetice produse separat de fiecare conductor (fig. 4.1.2 R). Liniile de cîmp intersec-

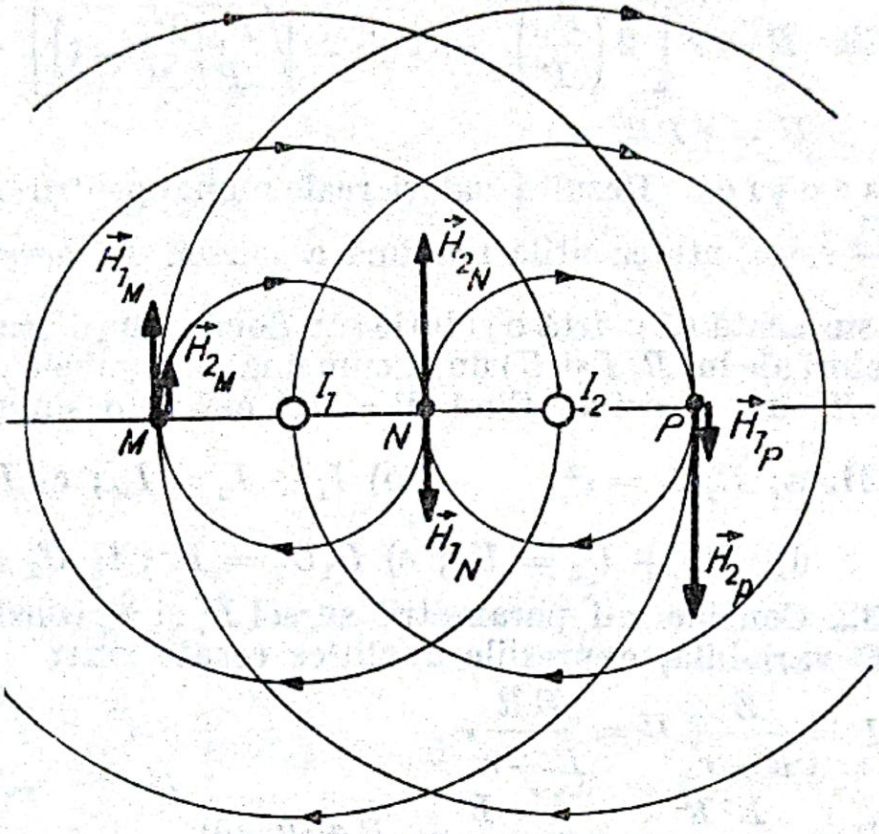


Fig. 4.1.2. R.

tează normal planul celor două conductoare, astfel încît $\vec{H}_1$ și $\vec{H}_2$ sînt paralele în punctele M, N și P. Ținînd seama de sensurile celor doi vectori, asociate după regula burghiului drept cu sensurile pozitive ale curenților din conductoare, se obțin pentru modulele intensităților cîmpurilor valorile $H_M = H_{1M} + H_{2M} = 15{,}9 + 10{,}6 = 26{,}5$ A/m; $H_N = H_{2N} - H_{1N} = 31{,}8 - 15{,}9 = 15{,}9$ A/m; $H_P = H_{1P} + H_{2P} = 5{,}3 + 31{,}8 = 37{,}1$ A/m.

Inducțiile magnetice rezultă

$$B_M = \mu_0 H_M = 3{,}33 \cdot 10^{-5}\ \text{T};\quad B_N = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{T};\quad B_P = 4{,}69 \cdot 10^{-6}\ \text{T}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.1.3. $H_M = H_{1M} - H_{2M} = 5{,}3$ A/m;

$H_N = H_{1N} + H_{2N} = 47{,}7$ A/m;

$H_P = H_{2P} - H_{1P} = 26{,}5$ A/m;

$B_M = 6{,}66 \cdot 10^{-6}$ T;

$B_N = 7{,}25 \cdot 10^{-5}$ T;

$B_P = 3{,}33 \cdot 10^{-5}$ T.

4.1.4.

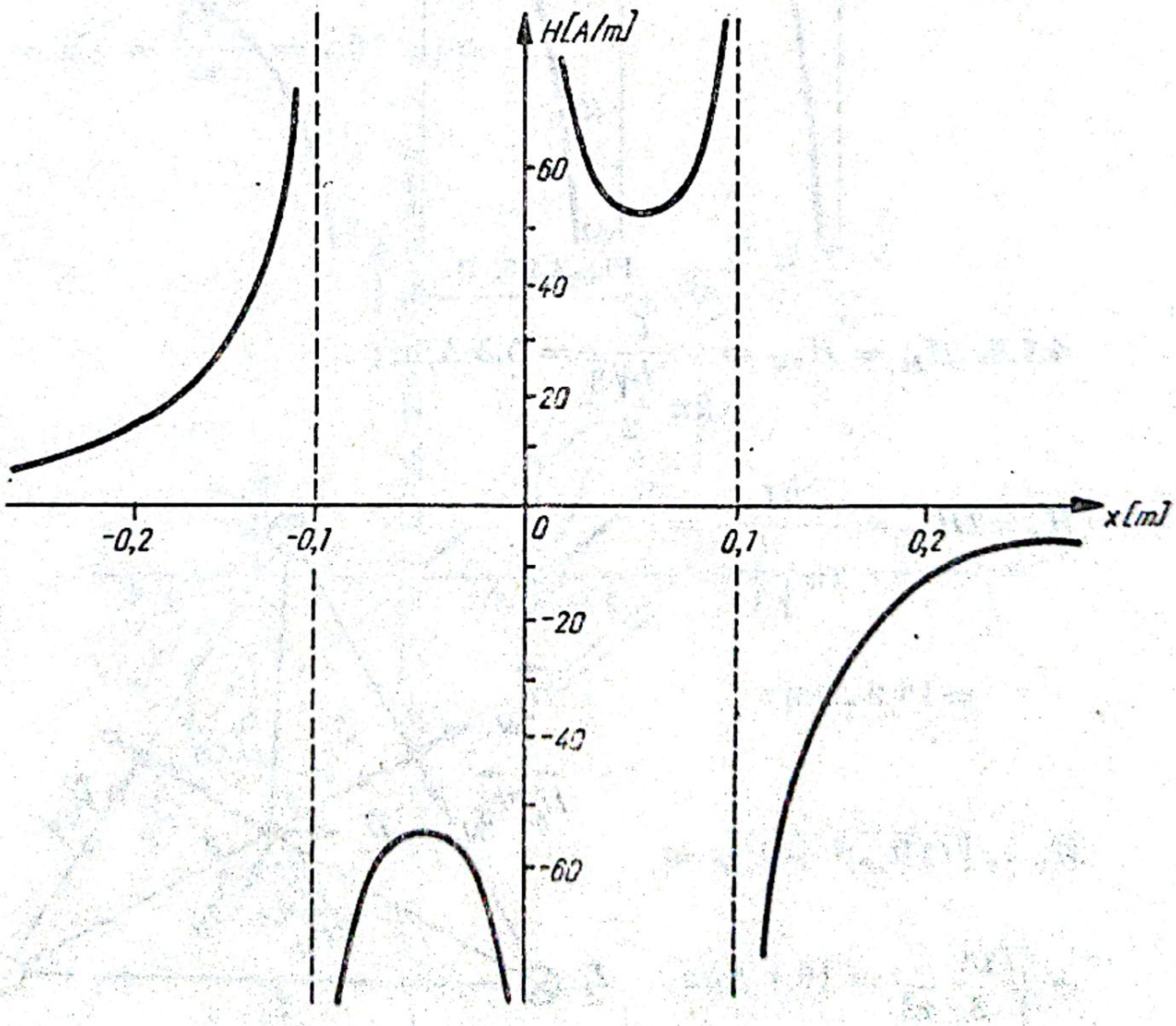


Fig. 4.1.4. R.

4.1.5.

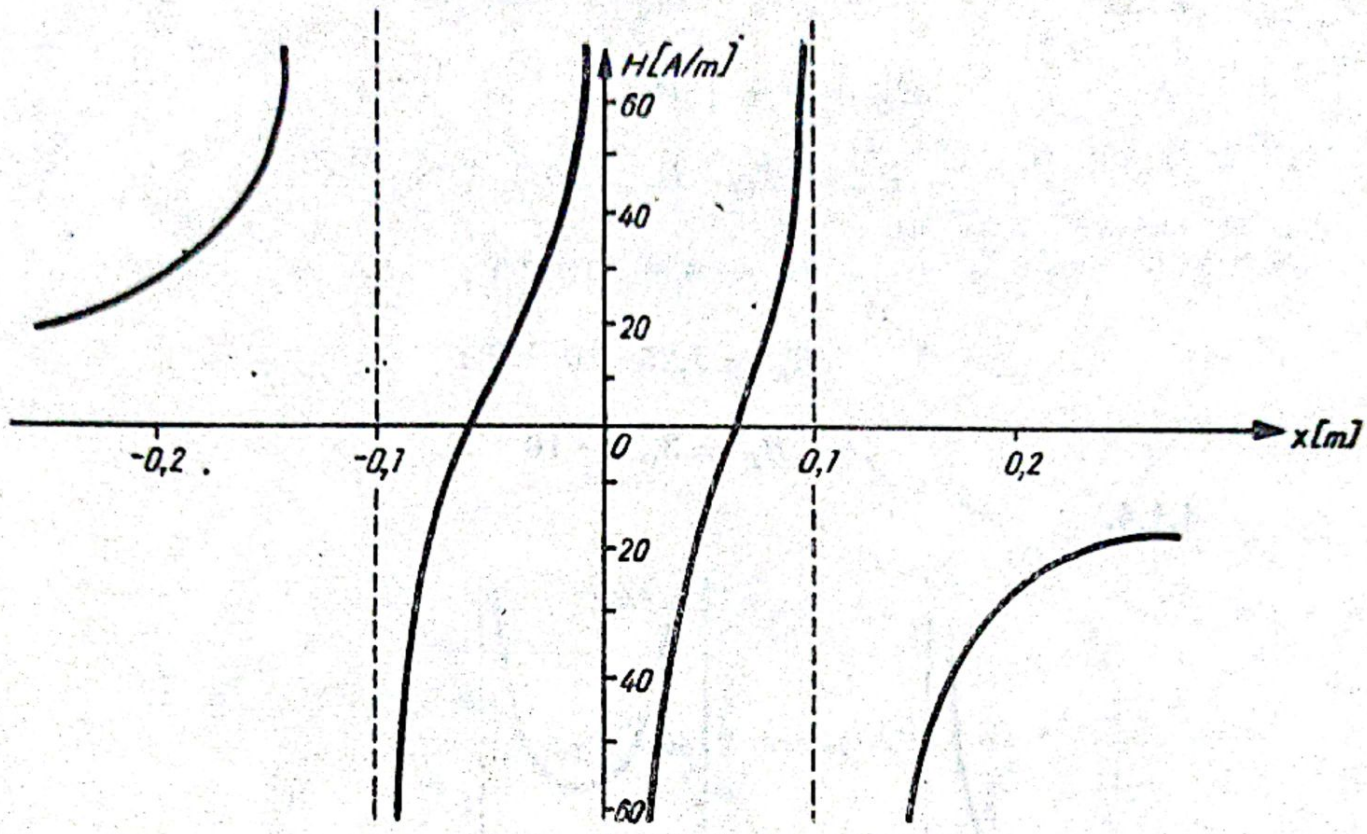


Fig. 4.1.5. R.

4.1.6. $H_M = H_{3M} = \dfrac{I}{2\pi \dfrac{l\sqrt{3}}{2}} = 5{,}3$ A/m;

$$H_N = 2H_{3N} = \frac{2I}{2\pi \frac{l}{\sqrt{3}}} =$$

$$= 15{,}9 \text{ A/m};$$

$$H_P = \sqrt{(2H_{1P})^2 + H_{2P}^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{13}{3}} \frac{1}{\pi l} = 19{,}1 \text{ A/m}.$$

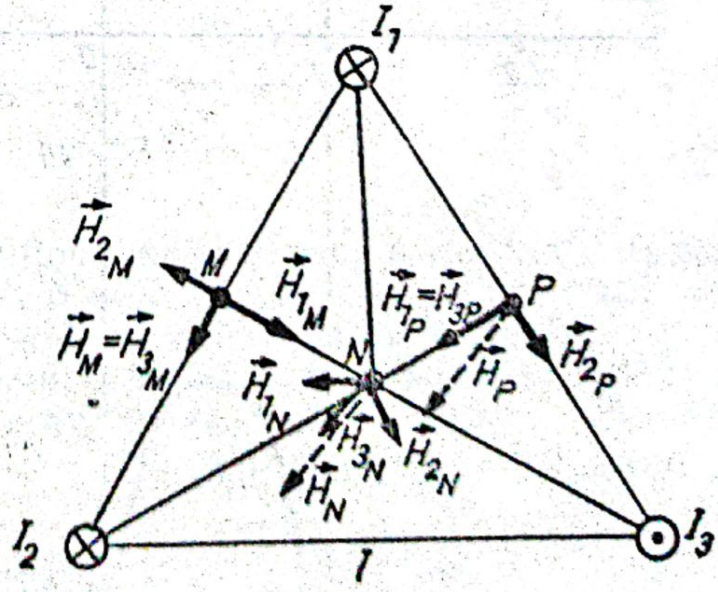


Fig. 4.1.6. R.

4.1.7. $H_M = H_P = 5{,}3$ A/m; $H_N = 0$.

4.1.8. Alegînd sensul de referinţă pozitiv orientat dinspre planul hîrtiei spre observator, rezultă

$$H_M = \frac{I_2 - I_1}{2\pi a} = 0\,;\quad H_N = \frac{-I_1 - I_2}{2\pi a} = 2\text{A/m}\,;$$

$$H_Q = \frac{I_1 - 2I_2}{4\pi a} = -\,0{,}5\text{ A/m}\,;\quad H_P = \frac{I_1 + 2I_2}{4\pi a} = 1{,}5\text{ A/m}.$$

4.1.9. $H_M = -\,0{,}5$ A/m; $H_N = -\,1{,}5$ A/m; $H_Q = 0$; $H_P = 1$ A/m.

4.1.10. $H_M = \dfrac{I\sqrt{2}}{\pi d} = 14{,}1$ A/m; $H_N = \dfrac{I\sqrt{10}}{3\pi d} = 10{,}55$ A/m;

$H_P = H_Q = \dfrac{I\sqrt{2}}{2\pi d} = 7{,}07$ A/m.

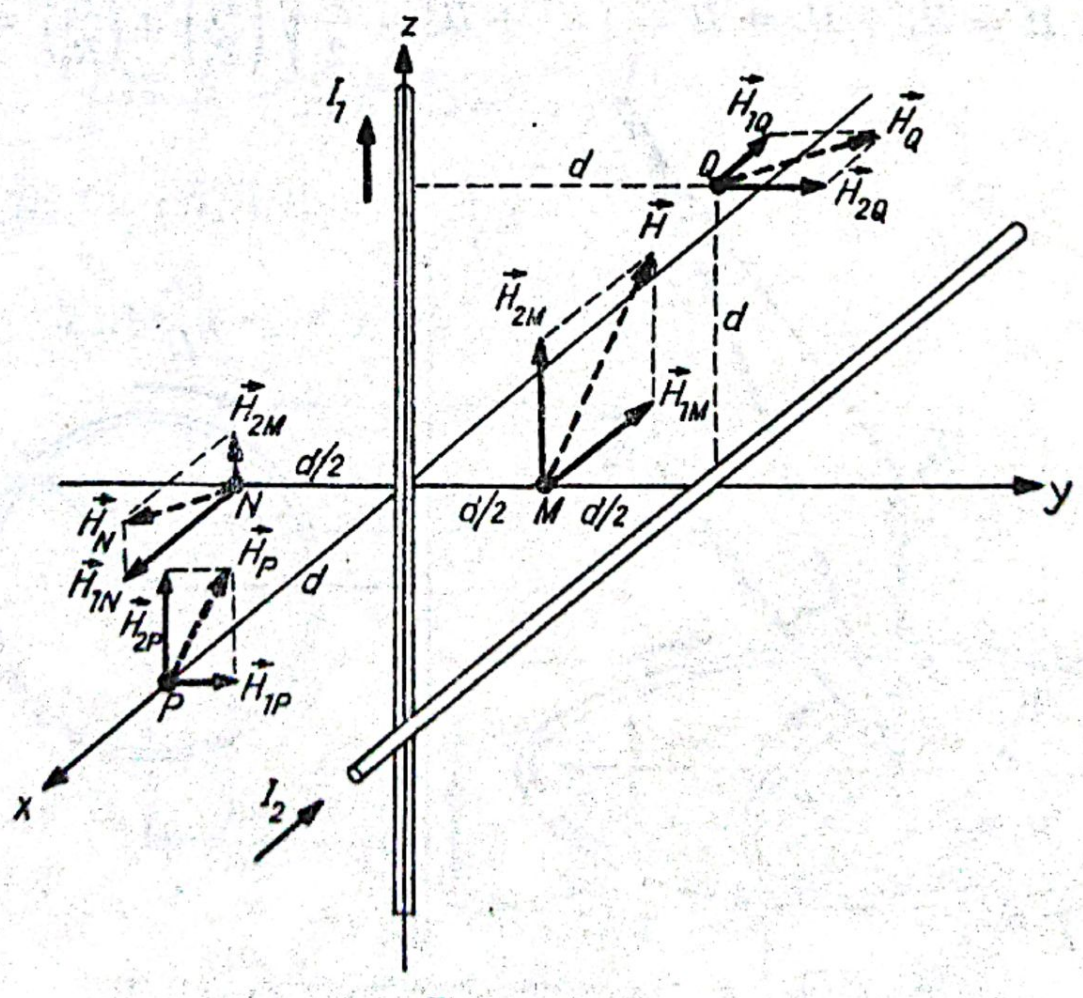


Fig. 4.1.10. R.

4.1.11. $H_M = \frac{I_1\sqrt{5}}{\pi d} = 11{,}2$ A/m; $H_N = \frac{I_1\sqrt{13}}{3\pi d} = 6$ A/m;

$H_P = H_Q = \frac{I_1\sqrt{5}}{2\pi d} = 5{,}6$ A/m;

4.1.12. $H = \frac{I}{2r} = 5$ A/m; $B = \mu_0 H = 6{,}28 \cdot 10^{-6}$ T.

4.1.13. $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$. Alegînd sensul de referinţă pozitiv pentru curentul celei de-a doua spire tot în sens trigonometric, rezultă: $H = \frac{I_1}{2R_1} + \frac{I_2}{2R_2}$. Pentru $H = 0$, se obţine $I_2 = -\frac{R_2}{R_1} I_1 =$ $= -6$ A. Semnul minus indică orientarea curentului din spira a doua în sens contrar sensului trigonometric.

4.1.14. $I_2 = 2R_2H - \frac{R_1}{R_2} I_1 = 8 - 6 = 2$ A.

4.1.15. $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \Rightarrow H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{I_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{R_2}\right)^2} =$ $= 250$ A/m.

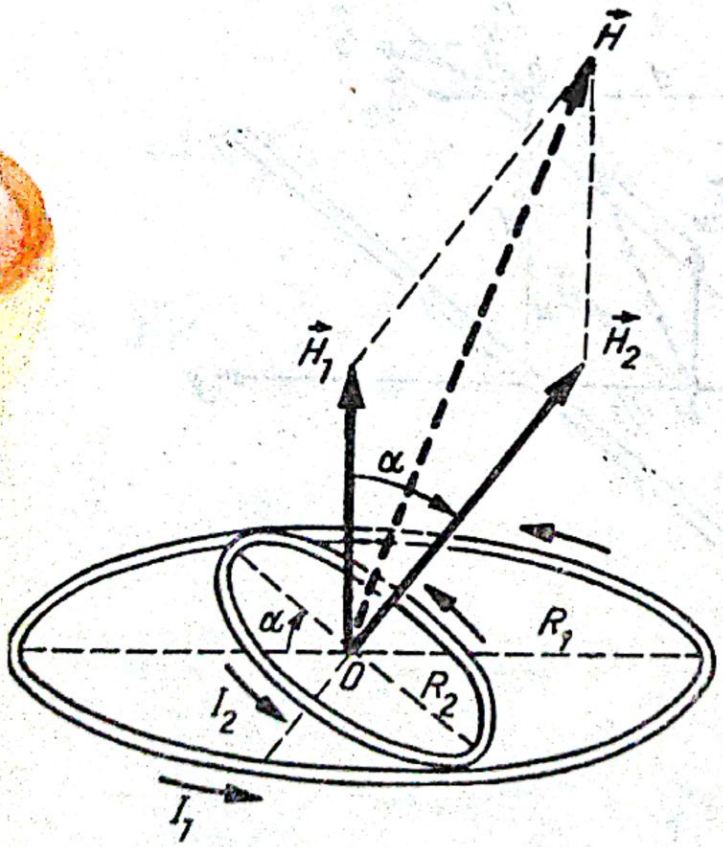


Fig. 4.1.16. R.

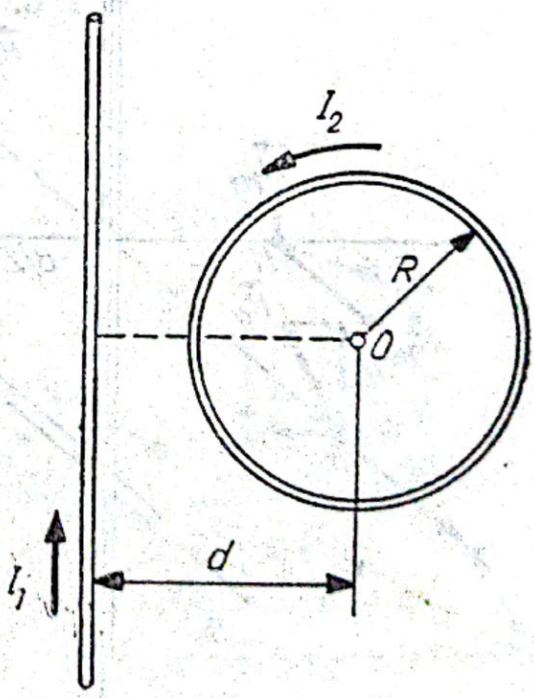


Fig. 4.1.17. R.

4.1.16. $H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 + 2 H_1 H_2 \cos \alpha}$

a) $H \approx 304$ A/m; b) $H \approx 180$ A/m.

S-a considerat că pentru $\alpha = 0$ sensurile curenţilor din cele două spire coincid. În caz contrar se inversează situaţiile de la punctele a şi b.

4.1.17. a) $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$; $\vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H}_1 = -\vec{H}_2$; $H_1 = H_2$ $\Rightarrow \frac{I_1}{2\pi d} = \frac{I_2}{2R}$; $d = \frac{I_1}{\pi I_2} R = 15{,}9$ cm, sensurile curenţilor trebuie să fie ca în fig. 4.1.17 R (sau ambele invers), astfel încît intensităţile cîmpurilor magnetice produse în O de cele două conductoare să fie de sens contrar.

b) După inversarea sensului curentului din spiră, cîmpurile produse în O de cele două conductoare se adună:

$$H = H_1 + H_2 = \frac{I_2}{R} = 40 \text{ A/m}.$$

4.1.18. $H' = H_1 + H_2 = \frac{I}{2R}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$;

$$H'' = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \frac{I}{2R}\sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2}} \Rightarrow H'' = \frac{\sqrt{\pi^2 + 1}}{\pi + 1} H' \approx 33 \text{ A/m}.$$

4.1.19. $\alpha = 45° \Rightarrow H_1 = H_2 \Rightarrow \frac{I_1}{2\pi d} = \frac{I_2}{2R}$; $d = \frac{R}{\pi} = 3{,}18$ cm.

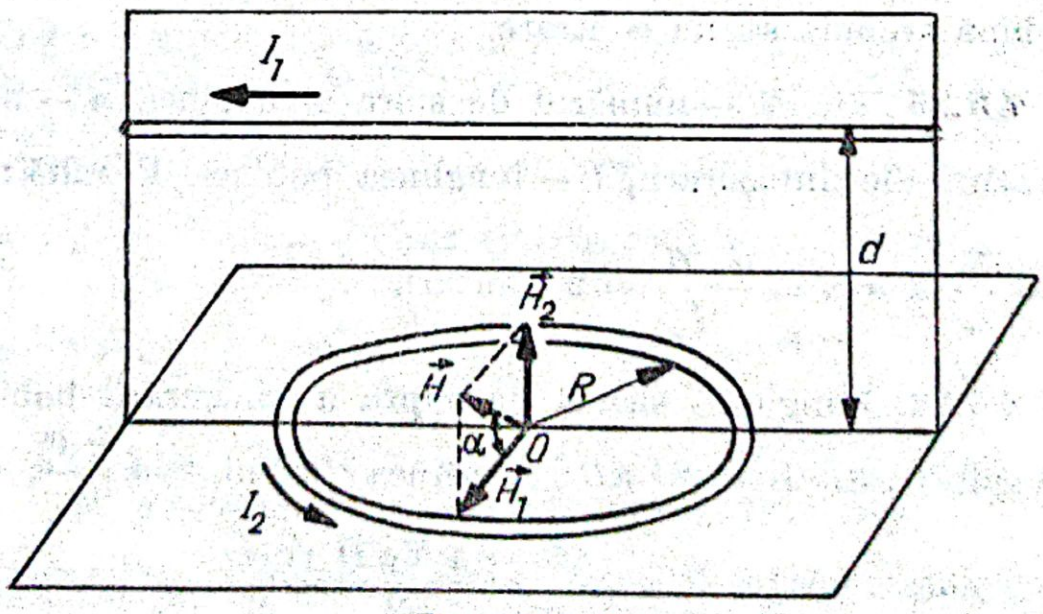


Fig. 4.1.19. R.

4.1.20. $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 \Rightarrow H = \sqrt{\left(\frac{I_1}{2\pi l}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{2\pi l}\right)^2 + \left(\frac{I_3}{2R}\right)^2} =$

$$= 5\sqrt{3} = 8{,}66 \text{ A/m}.$$

4.1.21. $H = \frac{NI}{l} = 10^3$ A/m.

4.1.22. $\varphi_s = BS = \mu_0 HS = 12{,}6 \cdot 10^{-7}$ Wb;

$$\varphi = N\varphi_s = 6{,}28 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}.$$

4.1.23. Dacă N este numărul de spire al solenoidului, lungimea acestuia este $l = Nd$, iar lungimea totală a firului este $s = N \cdot \pi D$. Rezultă

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{I}{d} = 2 \cdot 10^3 \text{ A/m}$$

şi

$$\varphi = NBS = N \cdot \mu_0 H \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \mu_0 \frac{\pi}{4} sDH = 7{,}46 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}.$$

4.1.24. $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$; $\vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H}_1 = -\vec{H}_2 \Rightarrow |\vec{H}_1| = |\vec{H}_2|$; $\frac{NI_1}{l} = \frac{I_2}{2R} \Rightarrow I_2 = 400$ A. Sensurile curenţilor din spiră şi din bobină trebuie să fie contrare.

4.1.25. Fie N — numărul de spire al bobinei, n — numărul de straturi ale înfăşurării, l — lungimea bobinei. Rezultă: $H = \frac{NI}{l}$, $l = \frac{N}{n} d \Rightarrow n = \frac{d \cdot H}{I} = 2$ straturi.

4.1.26. Lungimea sîrmei de cupru a înfăşurării bobinei (avînd N spire) este $L = N \cdot \pi D$, secţiunea firului $s = \frac{\pi d^2}{4}$, astfel încît rezistenţa sa este $R = \rho \frac{L}{s} = \frac{4N\rho D}{d^2}$,

Scanned with OKEN Scanner

Intensitatea curentului din înfășurare rezultă $I = \frac{U}{R}$, iar intensitatea cîmpului magnetic pe ax

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{d^2 U}{4 \rho l D} = 10^3 \text{ A/m}.$$

4.2.1. $\varphi = BS \cos \alpha = \mu_0 H ab \cos \alpha = 5{,}44 \cdot 10^{-5}$ Wb.

4.2.2. $L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} \approx 10^{-3}$ H.

4.2.3. $L' = \mu_r L \approx 0{,}5$ H.

4.2.4. $L = \mu \frac{N^2 S}{l}$, $L' = \mu \frac{(2N)^2 S}{l} \Rightarrow L' = 4L = 40$ mH.

4.2.5. $L = \mu \frac{N^2 S}{l}$, $L' = \mu \frac{N^2 S}{2l} \Rightarrow L' = \frac{L}{2}$.

4.2.6. Se consideră că prima bobină este parcursă de un curent avînd intensitatea I_1. Intensitatea cîmpului magnetic într-un punct de pe ax este $H_1 = \frac{N_1 I_1}{l_1}$, iar inducţia magnetică $B_1 = \mu_0 H_1$. Presupunînd omogen cîmpul magnetic din interiorul solenoidului, fluxul magnetic ce trece printr-o spiră a acestuia este $\varphi_1 = B_1 S_1$. Acelaşi flux parcurge fiecare spiră a celei de-a doua bobine, astfel încît fluxul total este produs de prima bobină în cea de-a doua este $\varphi_{21} = N_2 \varphi_1 = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} S_1 I_1$. Inductivitatea mutuală între cele două bobine rezultă $L_{12} = \frac{\varphi_{21}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} S_1 = 6{,}33 \cdot 10^{-5}$ H.

4.2.7. Fluxul magnetic ce trece printr-o spiră a celei de-a doua bobine, cînd prima este parcurcă de un curent de intensitate I_1, este $\varphi_1 = B_1 S_2 \cos \alpha = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l_1} S_2 \cos \alpha$. Fluxul total produs de prima

Scanned with OKEN Scanner

bobină în cea de-a doua este $\varphi_{21} = N_2\varphi_1$, astfel încît inductivitatea mutuală rezultă

$$L_{12} = \frac{\varphi_{21}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} S_2 \cos \alpha.$$

a) $L_{12} = 3{,}16 \cdot 10^{-5}$ H; b) $L_{12} = 2{,}74 \cdot 10^{-5}$ H;

c) $L_{12} = 1{,}58 \cdot 10^{-5}$ H; d) $L_{12} = 0$.

4.2.8. a) $H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{159}{r}$ [A/m], pentru r în centimetri. Graficul variației intensității cîmpului magnetic în funcție de r este reprezentat în figura 4.2.8. R, a.

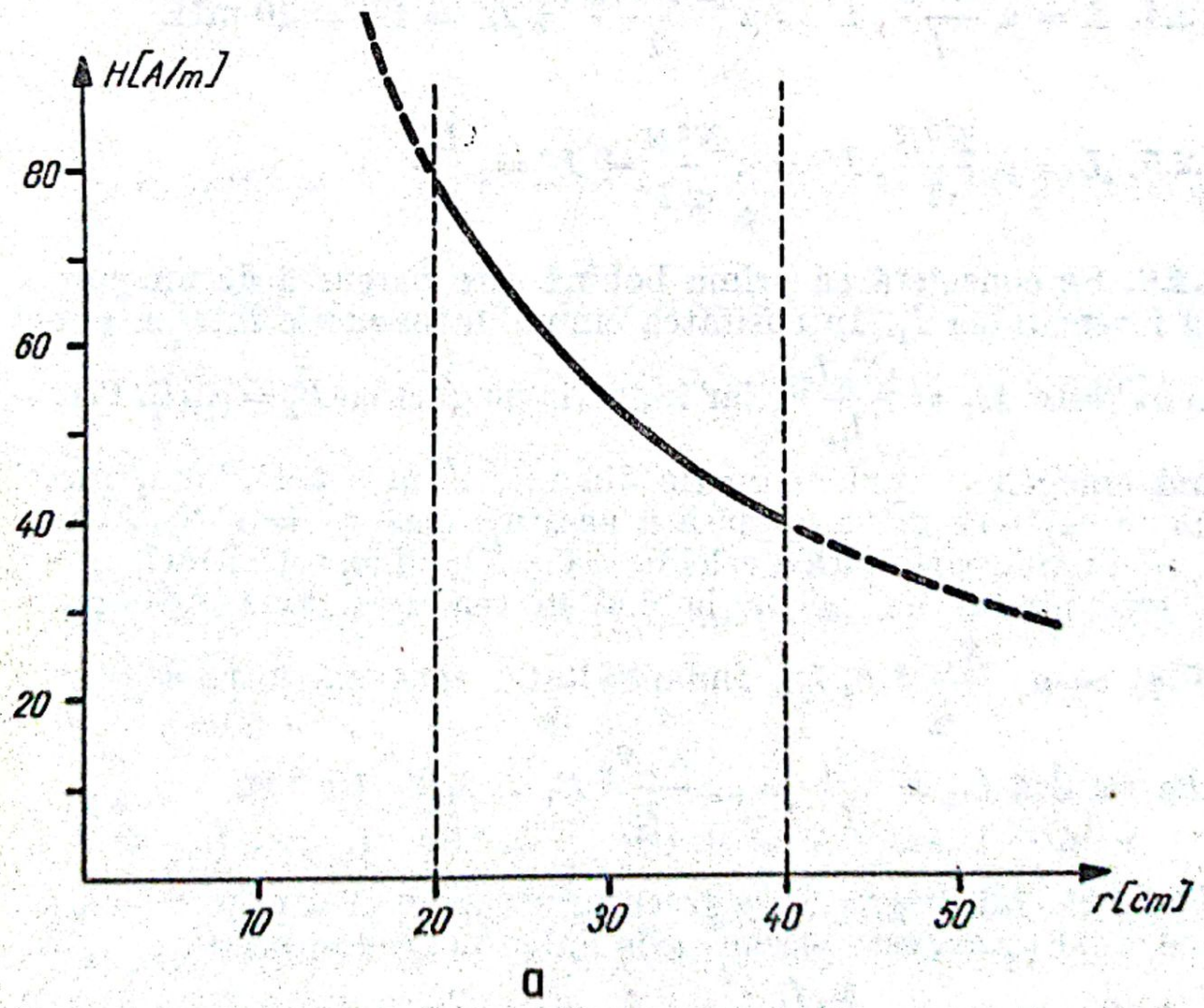


Fig. 4.2.8. R. a

b) În punctele unei fișii de lărgime Δr, foarte mică, paralelă cu conductorul filiform (fig. 4.2.8, b) cîmpul magnetic este practic constant, astfel încît fluxul care o străbate poate fi scris $\Delta\varphi = B\Delta S = \mu_0 H b \Delta r$. Fluxul total prin cadru este suma fluxurilor prin toate

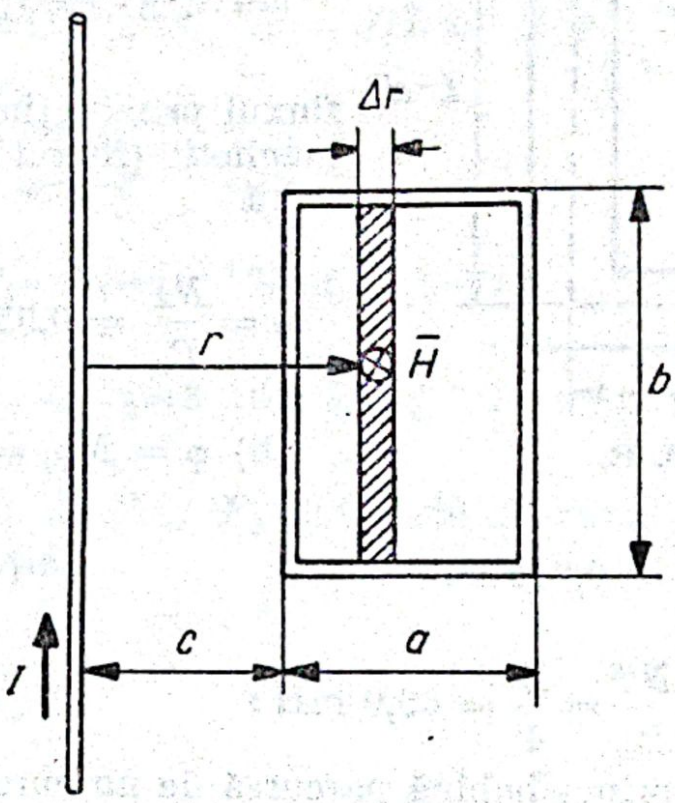


Fig. 4.2.8. R. b

fișiile în care se descompune suprafața cadrului. La limită, luînd lărgimea fișiilor $\Delta r \to 0$, fluxul se scrie sub formă de integrală

$$\varphi = \int_c^{c+a} \mu_0 b H \, dr = \frac{\mu_0 b I}{2\pi} \int_c^{c+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 b I}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c} =$$

$$= 6 \ln 2 \cdot 10^{-7} \text{ Wb} = 4{,}16 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}.$$

c) $L_{12} = \dfrac{\varphi}{I} = 4{,}16 \cdot 10^{-8}$ H.

Scanned with OKEN Scanner

4.2.9. a) Reluctanţa totală a circuitului magnetic este

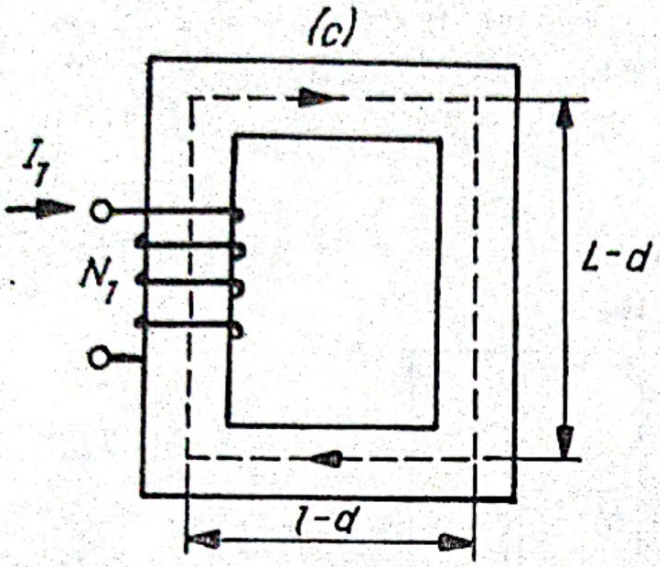


Fig. 4.2.9. R.

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{a(L+l-2d)}{d^2} = 3{,}58 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1};$$

fluxul prin secţiunea circuitului magnetic (fluxul fascicular) rezultă

$$\varphi_f = \frac{NI}{R_m} = 0{,}559 \cdot 10^{-3} \text{ Wb};$$

b) $\varphi = N\varphi_f = 0{,}559$ Wb;

c) $L = \frac{\varphi}{I} = \frac{N^2}{R_m} = 0{,}279$ H.

4.2.10. a) $L' = \frac{N'^2}{R_m} = \frac{L}{4} = 69{,}9$ mH;

b) Presupunînd prima bobină parcursă de un curent cu intensitatea I, fluxul fascicular este $\varphi_f = \frac{NI}{R_m}$, iar fluxul prin a doua bobină $\varphi' = N'\varphi_f = \frac{NN'I}{R_m}$. Inductivitatea mutuală între cele două bobine este $M = \frac{\varphi'}{I} = \frac{NN'}{R_m} = 139{,}5$ mH.

4.2.11. a) Reluctanţa întrefierului este $R_\delta = \frac{1}{\mu_0} \frac{\delta}{d^2} = 2{,}39 \cdot 10^6 \text{H}^{-1}$, astfel încît reluctanţa totală a circuitului magnetic devine

$$R_{m_1} = R_m + R_\delta = 5{,}97 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}.$$

Corespunzător, fluxul fascicular este

$$\varphi_{f_1} = \frac{NI}{R_{m_1}} = 0{,}335 \cdot 10^{-3} \text{ Wb};$$

Scanned with OKEN Scanner

b) $\varphi_1 = N\varphi_{f_1} = 0{,}335$ Wb ; c) $L_1 = \frac{\varphi_1}{I} = \frac{N_1^2}{R_{m_1}} = 0{,}167$ H.

4.3.1. $F = I\,lB = 7{,}5$ N.

2. $F =$ 4ne $I\,(l \times \vec{B})$, $F = IlB \sin\alpha = 3{,}75$ N.

4.3.3. $F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{d} = 2 \cdot 10^{-4}$ N/m.

4.3.4. a) $F_1 = F_3 = 10^{-4}$ N/m, $F_2 = 0$;

b) $F_1 = F_3 = 3 \cdot 10^{-4}$ N/m ; $F_2 = 0$.

În cazul a, forţele F_1 şi F_3 sînt forţe de repulsie, iar în cazul b — forţe de atracţie.

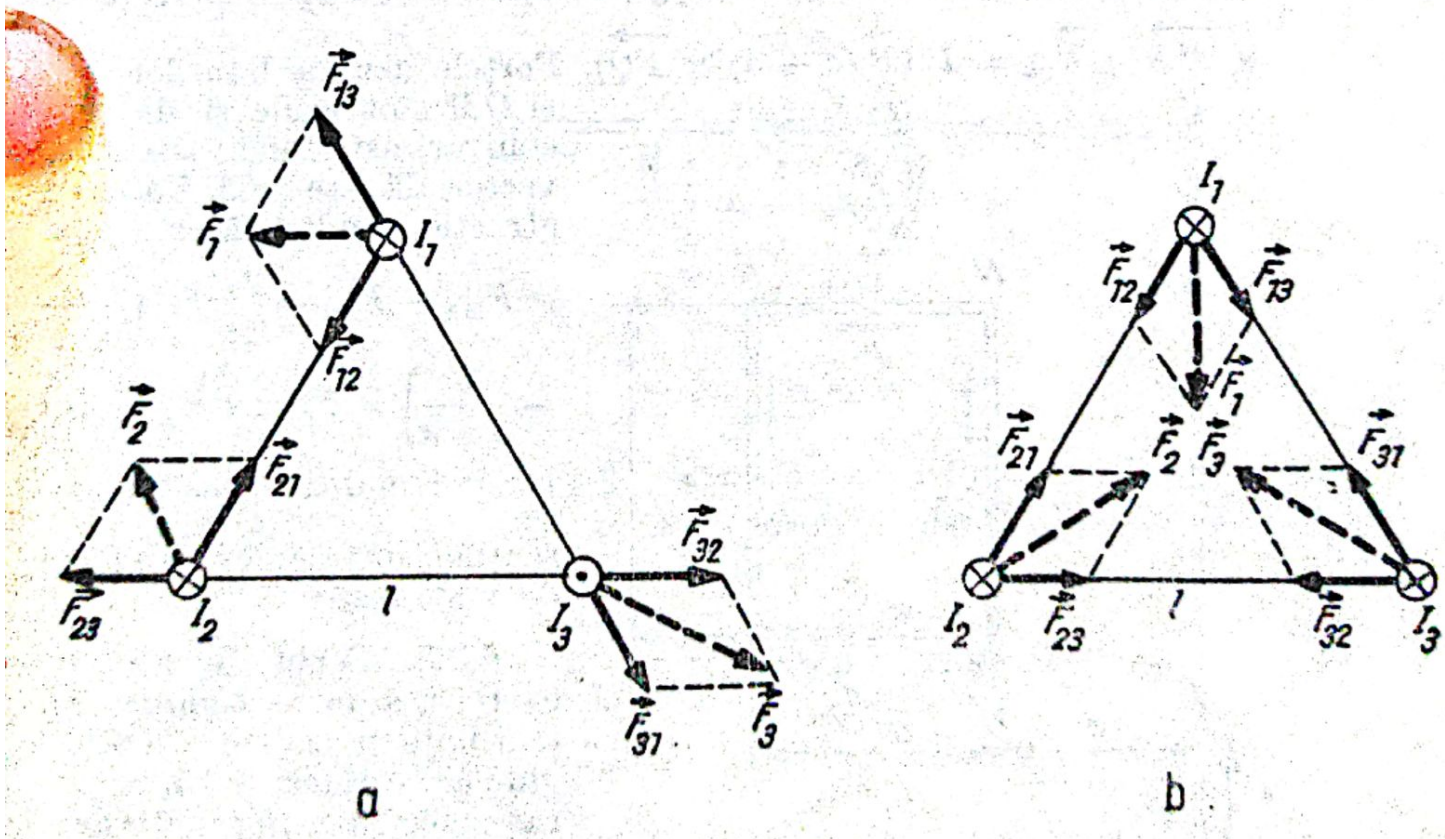


Fig. 4.3.5. R.

4.3.5. $F_{jk} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{aI^2}{l} = 5{,}77 \cdot 10^{-5}$ N, $(j,\ k = 1, 2, 3;\ j \neq k)$.

a) $F_1 = F_2 = 5{,}77 \cdot 10^{-5}$ N, $F_3 = 10^{-4}$ N;

b) $F_1 = F_2 = F_3 = 10^{-4}$ N.

4.3.6. Forţa rezultantă ce se exercită asupra fiecăruia din conductoare tind să le aducă paralel, astfel încît curenţii să aibă acelaşi sens.

4.3.7. Forţa totală ce se exercită asupra cadrului este $\vec{F} = \vec{F}_{MN} + \vec{F}_{NP} + \vec{F}_{PQ} + \vec{F}_{QM}$. Pentru sensurile curenţilor din fig. 4.3.7. R, forţa $\vec{F}_{MN}$ este de atracţie, iar $\vec{F}_{PQ}$ de respingere : $\vec{F}_{MN} = I'(\vec{B}(c) \times \overrightarrow{MN})$; $\vec{F}_{PQ} = I'(\vec{B}(c+a) \times \overrightarrow{PQ})$. Forţele asupra laturilor NP şi QM sînt egale şi de sens contrar, astfel încît suma lor vectorială este nulă. Forţa de atracţie rezultantă este $F = F_{MN} - F_{PQ} = \dfrac{\mu_0}{2\pi} II' \left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{c+a}\right) = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ N. Inversînd unul din sensurile curenţilor, forţa $\vec{F}$ devine o forţă de respingere.

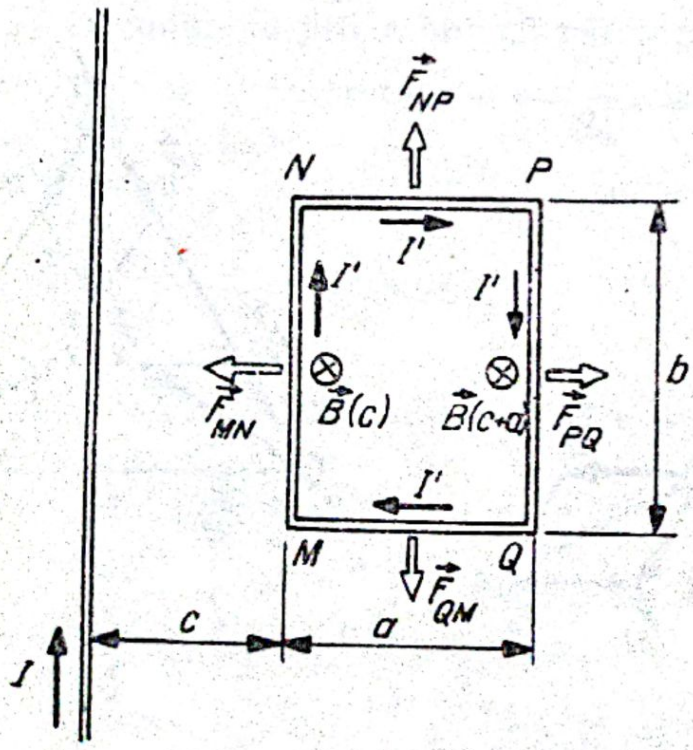


Fig. 4.3.7. R.

4.3.8. Forţa de atracţie exercitată între conductorul rectiliniu şi cadrul dreptunghiular variază, la îndepărtarea acestuia, în funcţie de c. Forţa exterioară care efectuează deplasarea este egală în

modul cu F, însă trebuie să fie orientată în sensul creşterii distanţei c. Lucrul mecanic efectuat la deplasarea cadrului pe o distanţă d este

$$L = \int_c^{c+d} F\,dc = \frac{\mu_0}{2\pi}\, II' \ln \frac{c+d}{c} \cdot \frac{c+a}{c+a+d} =$$

$$= 10^{-5} \ln \frac{4}{3} = 2{,}88 \cdot 10^{-6} \text{ J}.$$

4.3.9. a) Inducţia magnetică din solenoid este $B = \mu_0 \frac{NI}{l} =$ $= 3{,}14 \cdot 10^{-3}$ T. Forţa asupra conductorului este $F = Bia =$ $= 6{,}28 \cdot 10^{-4}$ N, unde a este lungimea porţiunii conductorului aflată în cîmp (egală cu latura solenoidului).

b) Lucrul mecanic $L = Fa = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ J. Se observă că $L =$ $= Ba^2 \cdot i = \varphi \cdot i$, unde φ — fluxul fascicular al solenoidului.

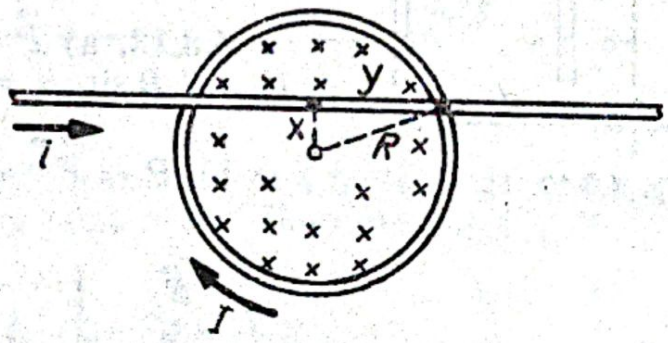


Fig. 4.3.10. R.

4.3.10. a) $B = \mu_0 \frac{NI}{l} = 3{,}14 \cdot 10^{-3}$ T, $F = Bi \cdot 2y = 2Bi\sqrt{R^2 - x^2} =$

$= 6{,}28 \cdot 10^{-4} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}$ N; b) $L = \int_{-R}^{R} F\,dx = B \cdot \pi R^2 \cdot i = \varphi \cdot i =$

$= 9{,}9 \cdot 10^{-3}$ J.

4.3.11. $F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{r}$; $L = \int_r^{2r} F\,dr = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \ln 2 = 5{,}55 \cdot 10^{-5}$ J.

4.3.12. Forța ce se exercită pe unitatea de lungime a conductorului din mijloc este $\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}$. Alegînd ca sens de referință pozitiv sensul creșterii deplasării x, de la conductorul *1* la *3* în fig. 4.3.12 R, se obține

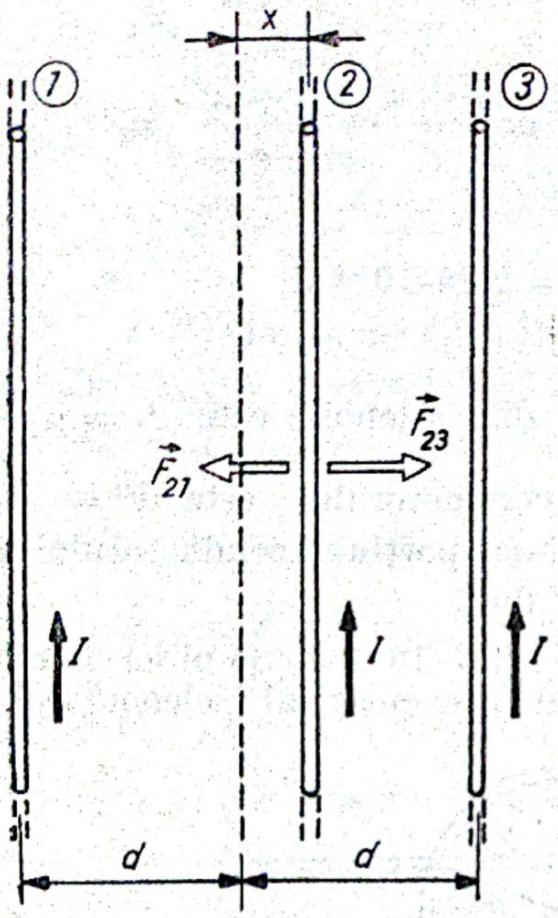


Fig. 4.3.12. R.

$$F_2 = F_{23} - F_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \left(\frac{1}{d-x} - \frac{1}{d+x}\right),$$

Lucrul mecanic pentru o deplasare δ este

$$L = \int_0^{\delta} F_2 \mathrm{d}x = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \ln\left(\frac{d}{d-\delta} \times \frac{d}{d+\delta}\right) = 2 \cdot 10^{-5} \ln\frac{4}{3} = 5{,}76 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}.$$

4.3.13. a) $\vec{F} = \vec{i}(\vec{l} \times \vec{B})$,
$F = ilB \sin \alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ N;

b) $P = \vec{F}\vec{v} = 4 \cdot 10^{-2}$ W.

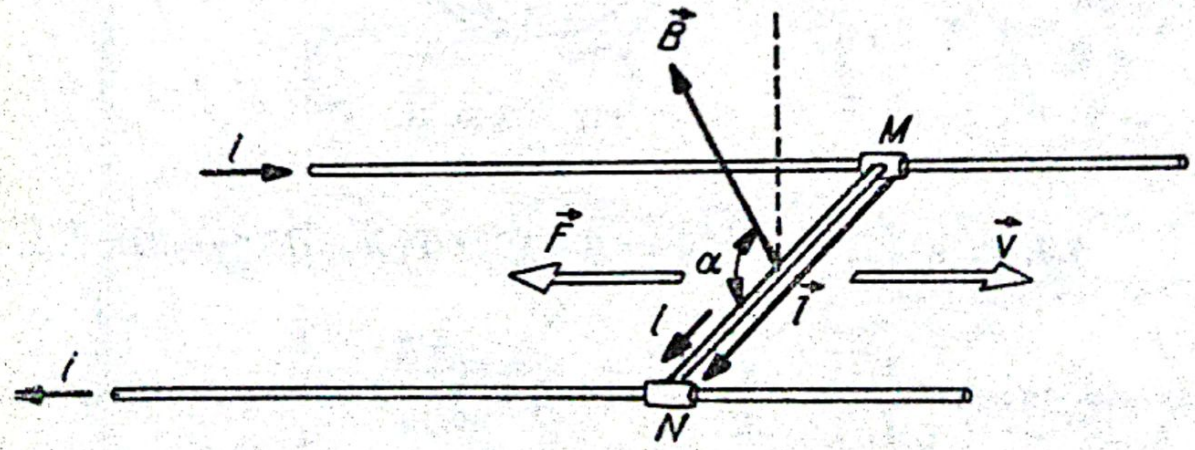


Fig. 4.3.13. R.

4.3.14. În fig. 4.3.14 R este reprezentat cadrul, văzut în lungul axului, într-o poziție intermediară, rotit cu un unghi θ.

Scanned with OKEN Scanner

a) Sub influenţa cîmpului magnetic, asupra laturilor cadrului paralelele cu axul se exercită forţele $F = ilB$, orientate ca în figură. Pentru rotirea cadrului în sensul indicat în enunţ, trebuie să se acţioneze din exterior cu forţe egale, dar de sens contrar. În urma

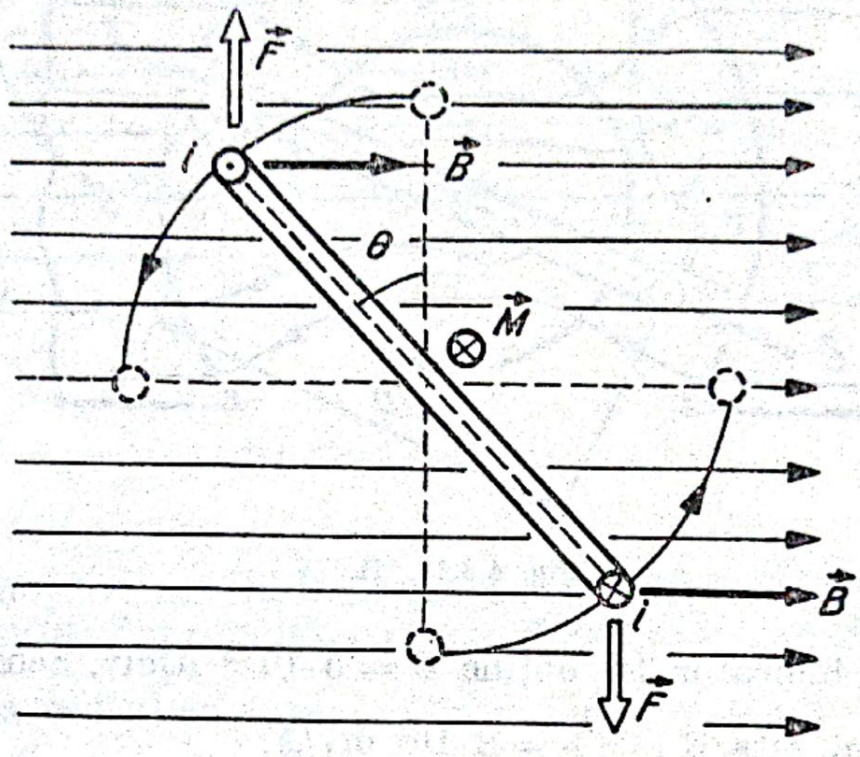


Fig. 4.4.14. R.

rotirii, punctul de aplicaţie al fiecărei forţe se deplasează pe direcţia acesteia cu $l/2$, astfel încît lucrul mecanic total este

$$L = 2F\frac{l}{2} = il^2B = 10^{-3}\ \text{J}.$$

b) $M(\theta) = lF\sin\theta \to M(0) = 0,\ M\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10^{-3}\ \text{N}\cdot\text{m}.$

4.3.15. Cîmpul magnetic din întrefier este orientat radial, astfel încît forţa $F = IlB$, exercitată asupra unei laturi a bobinei paralele cu axul, este orientată tangenţial. Momentul total cu care cîmpul magnetic acţionează asupra bobinei rezultă: $M = N\cdot 2F\frac{D}{2} = NIlDB$. Momentul opus produs de arcurile spirale la o rotire cu un unghi θ din poziţia iniţială este $M_a = k\theta$. La echilibru $M = M_a$,

de unde $\theta = \frac{1}{k} NlDBI = 60°$. Constanta C a aparatului este egală cu intensitatea curentului corespunzătoare unei deviaţii de o divi-

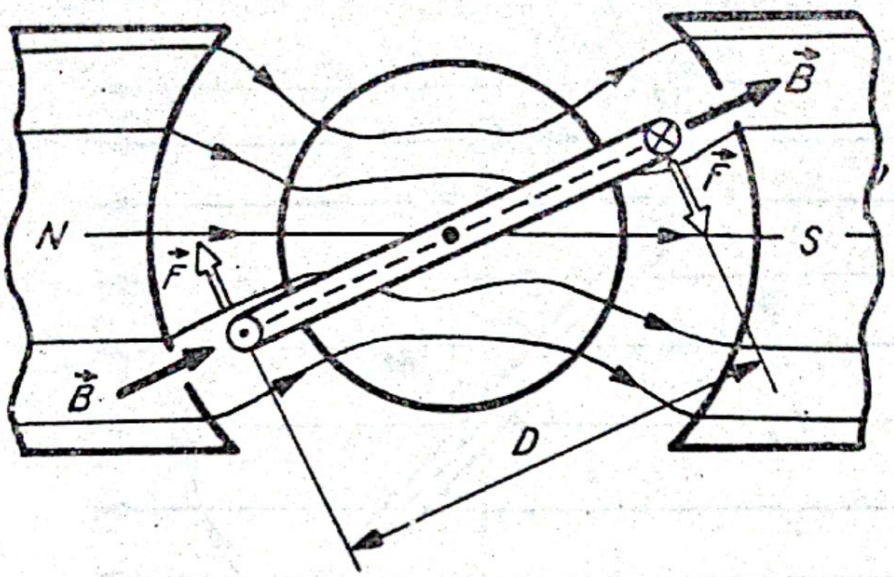


Fig. 4.3.15. R.

ziune a acului indicator. Se obţine $C = 5 \cdot 10^{-5}$ A/div. Sensibilitatea S a aparatului este $S = \frac{1}{C} = 2 \cdot 10^4$ div/A.

4.4.1. Forţa $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ exercitată de un cîmp magnetic constant în timp asupra unei particule încărcate este perpendiculară pe direcţia vitezei acesteia, astfel încît nu efectuează lucru mecanic. Ca urmare, energia cinetică a particulei nu se modifică şi viteza ei rămîne aceeaşi în modul, schimbîndu-şi numai direcţia. În fiecare punct al traiectoriei particulei, acceleraţia mişcării este orientată după direcţia normalei, componenta tangenţială a acceleraţiei fiind nulă.

4.4.2. Forţa exercitată asupra electronului, avînd sarcina (-e), este $\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B}) = -e(\vec{v}_\perp \times \vec{B})$, unde $v_\perp = v_0 \sin\alpha$ este componenta vitezei electronului perpendiculară pe liniile de cîmp. Forţa $\vec{F}$ este orientată permanent perpendicular pe liniile de cîmp, astfel încît componenta $v_{||}$ a vitezei electronului paralelă cu liniile de cîmp nu este modificată. În planul perpendicular pe $\vec{B}$, mişcarea electro-

Scanned with OKEN Scanner

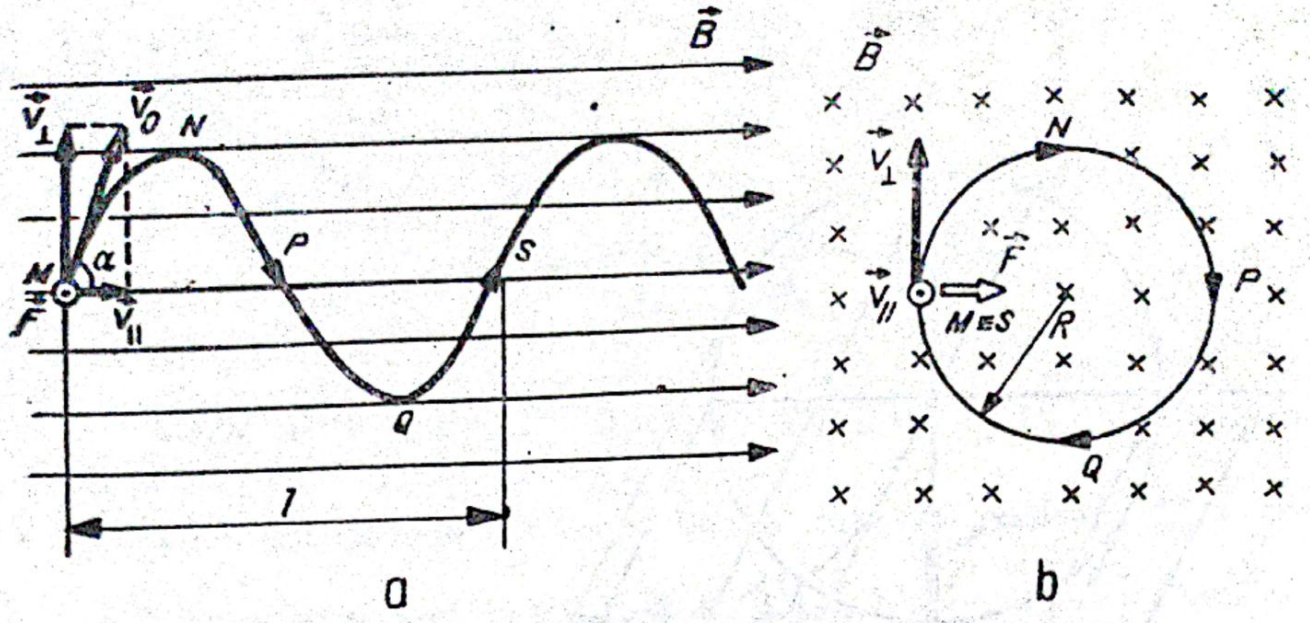


Fig. 4.4.2. R. (a, b)

nului se face după o traiectorie circulară (fig. 4.4.2.R, b), a cărei rază R se poate calcula din condiția ca forța F exercitată de cîmp să fie egală cu forța centrifugă: $ev_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{R}$. Se obține $R = \frac{mv_{\perp}}{eB} = \frac{mv_0}{eB} \sin \alpha$. Perioada mișcării de rotație este $T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = 2\pi \frac{m}{eB}$. Traiectoria electronului este deci o elice circulară ca în fig. 4.4.2. R, c. Pasul elicei este $l = v_{||} \cdot T = 2\pi \frac{m}{eB} v_0 \cos \alpha = 2\pi R \operatorname{ctg} \alpha$. În cazul particular $\alpha = 0$, forța exercitată de cîmpul magnetic asupra electronului este nulă, astfel încît mișcarea sa rămîne rectilinie și uniformă. În cazul $\alpha = \frac{\pi}{2}$, electronul parcurge o traiectorie circulară într-un plan perpendicular pe liniile de cîmp.

4.4.3. a) $R = \frac{mv_0}{eB} = 5{,}69 \cdot 10^{-3}$ m; b) $T = \frac{2\pi m}{eB} = 3{,}57 \cdot 10^{-8}$ s.

4.4.4. a) $R = 10{,}45$ m; b) $T = 6{,}55 \cdot 10^{-5}$ s.

4.4.5. a) $\frac{R_p}{R_e} = \frac{m_p}{m_e} = 1\,836$; b) Fiind accelerate sub aceeași

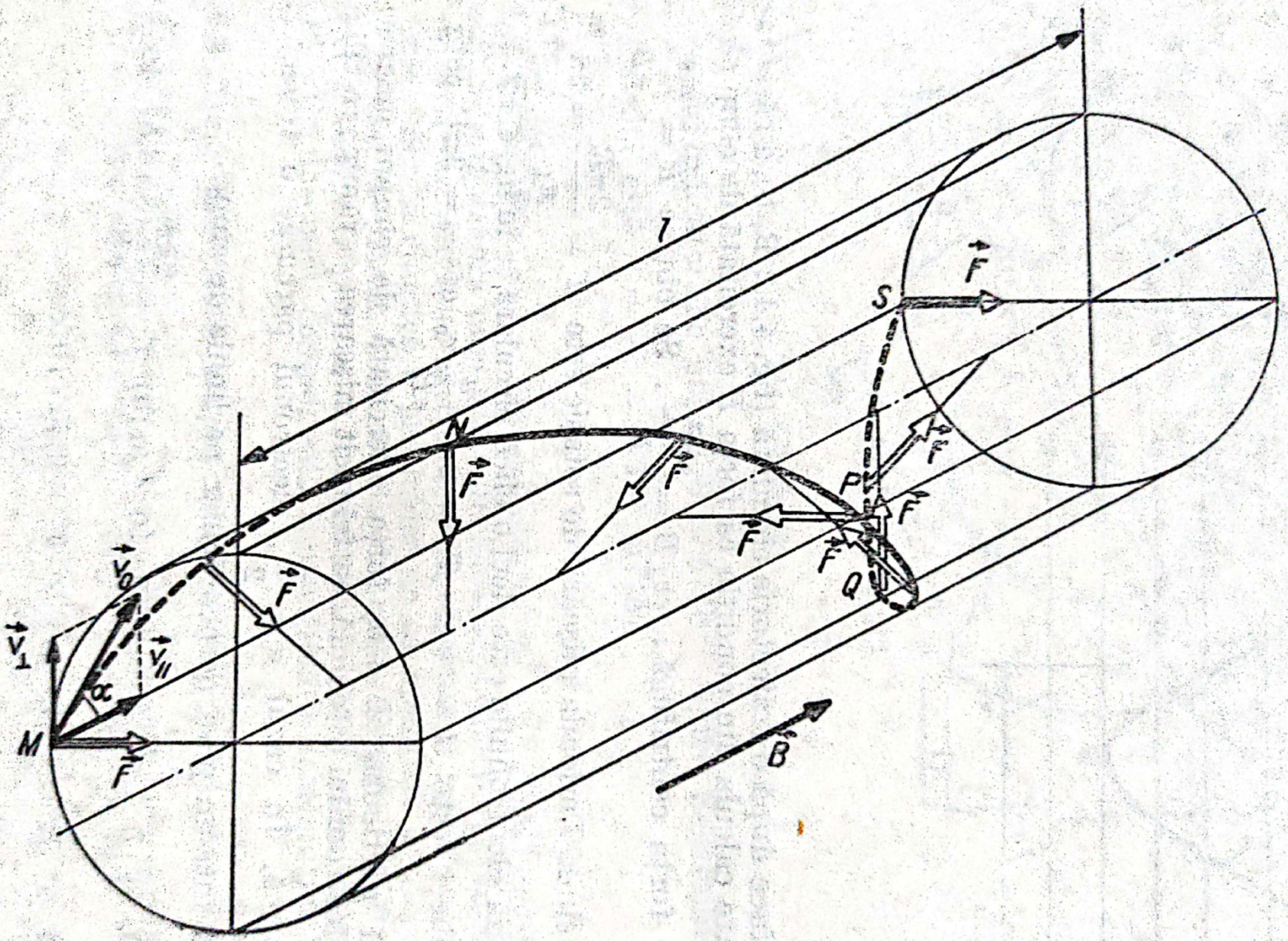


Fig. 4.4.2. R. (c)

Scanned with OKEN Scanner

diferență de potențial, particulele au aceeași energie cinetică: $\frac{m_p v_p^2}{2} = \frac{m_e v_e^2}{2}$, astfel încît

$$\frac{R_p}{R_e} = \frac{m_p v_p}{m_e v_e} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = 42{,}8.$$

4.4.6. a) $v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = 1{,}71 \cdot 10^7$ m/s; b) $R = \frac{mv}{qB} = 0{,}354$ m.

4.4.7. Particulele sînt accelerate într-un același cîmp, astfel încît au aceeași energie cinetică (v. 4.4.5, b). $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = 0{,}926$.

4.4.8. a) Frecvența tensiunii de accelerare aplicată între duanții ciclotronului trebuie să coincidă cu frecvența mișcării de rotație descrisă în cîmpul magnetic de particulele accelerate: $f = \frac{eB}{2\pi m}$ (v. 4.4.2). Rezultă $B = \frac{2\pi f m}{e} = 0{,}787$ T. b) Energia maximă a protonilor este determinată de raza maximă a traiectoriei lor, limitată de raza duanților

$$W_{max} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \frac{e^2 B^2 R^2}{m^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \pi^2 m f^2 D^2 =$$

$$= 11{,}86 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 7{,}4 \text{ MeV}.$$

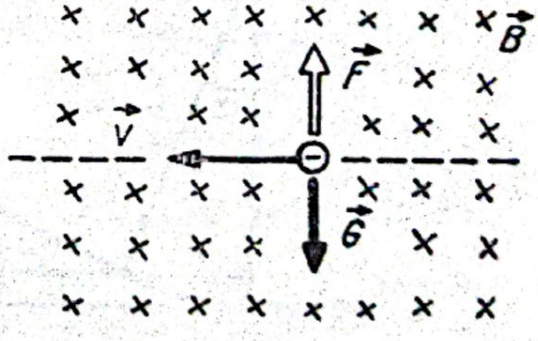


Fig. 4.4.9. R.

4.4.9. $F = evB$, $G = mg \Rightarrow v = \frac{mg}{e\mu_0 H_0} = 2{,}77 \cdot 10^{-6}$ m.

4.4.10. $R = \frac{mv_0}{eB} = 5{,}69 \cdot 10^{-2}$ m; $l = 2\pi R \operatorname{ctg} \alpha = 0{,}357$ m.

Scanned with OKEN Scanner

4.4.11. Viteza protonului după accelerarea în cîmp electric $v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Inducţia magnetică necesară pentru ca raza elicei pe care o descrie protonul în cîmp să fie egală, la limită, cu raza solenoidului

$$B = \frac{mv_0}{eR} \sin \alpha = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2mU}{e}} \sin \alpha = 2{,}04 \cdot 10^{-2} \text{ T}.$$

Intensitatea cîmpului magnetic din solenoid este $H = \frac{NI}{l}$, astfel încît intensitatea curentului din înfăşurarea acestuia rezultă: $I = \frac{Hl}{N} = \frac{Bl}{\mu_0 N} = 4{,}06$ A.

4.4.12. a) $v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 1{,}87 \cdot 10^7$ m/s, $R = \frac{mv_0}{eB} = 0{,}1065$ m;

b) $d = R - \sqrt{R^2 - l^2} = 1{,}15 \cdot 10^{-2}$ m, $\sin \alpha = \frac{l}{R} = 0{,}47$, $\alpha \approx 28°$;

c) $D = d + L \operatorname{tg} \alpha \approx 0{,}144$ m.

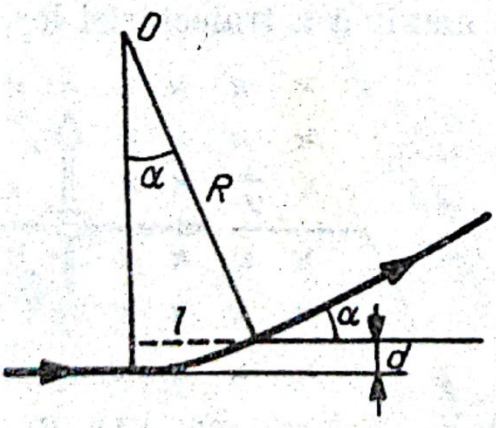


Fig. 4.4.12. R.

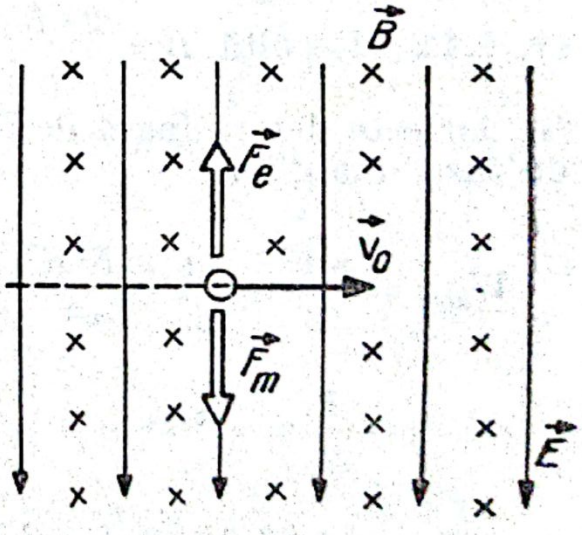


Fig. 4.4.13. R.

4.4.13. Forţa exercitată de cîmpul electric $\vec{F}_e$ şi forţa exercitată de cîmpul magnetic $\vec{F}_m$ asupra electronului trebuie să fie egale şi de sens contrar (fig. 4.4.13 R): $\vec{F}_e = -\vec{F}_m$.

Rezultă: $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}_0$.

4.4.14. Dacă viteza medie a electronilor din banda metalică este v, intensitatea curentului prin secţiunea acesteia este $I = ldnev$, de unde rezultă: $v = \dfrac{I}{ldne}$. Asupra unui electron care se mişcă cu

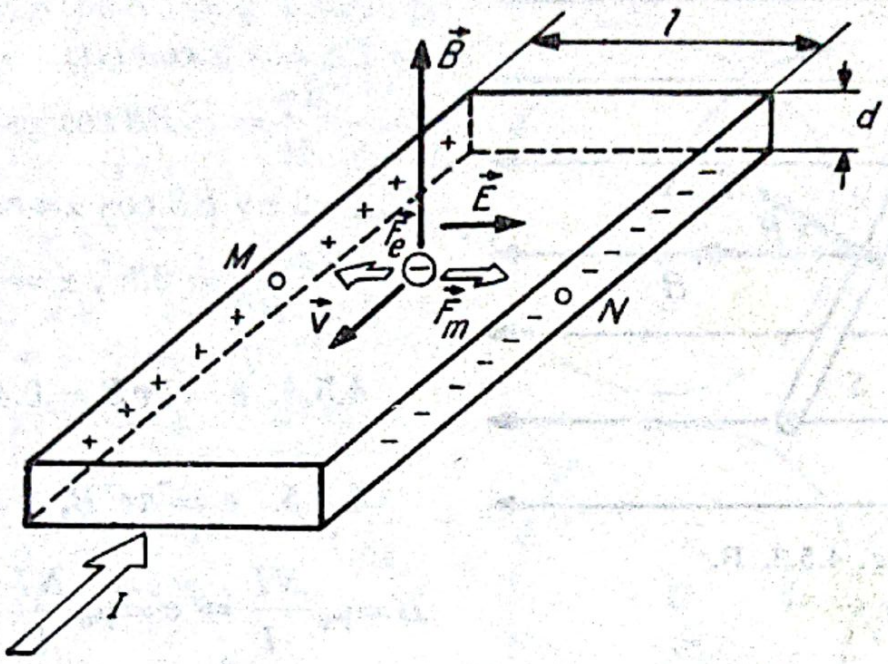


Fig. 4.4.14. R.

viteza $\vec{v}$ se exercită în cîmpul magnetic cu inducţia $\vec{B}$ o forţă $\vec{F}_m = -e \times \vec{v} \times \vec{B}$ (fig. 4.4.14.R). Acumularea în exces a electronilor pe una din feţele benzii duce la apariţia unui cîmp electric transversal. După atingerea unei stări de echilibru staţionar, cîmpul electric exercită asupra electronilor o forţă $\vec{F}_e = -e\vec{E}$, care echilibrează forţa $\vec{F}_m$ exercitată de cîmpul magnetic: $\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0$. Intensitatea cîmpului electric transversal este deci $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}$, ca în problema 4.4.13. Tensiunea Hall produsă între bornele M şi N este $U = El = Bvl = \dfrac{1}{dne} BI = k\dfrac{BI}{d}$, unde $k = \dfrac{1}{ne}$ este constanta Hall a materialului benzii. Pentru datele problemei $k = 6{,}25 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{C}^{-1}$ şi $U = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$ V.

4.5.1. $e = -\dfrac{d\varphi}{dt}$, $\varphi = BS \Rightarrow |e| = \dfrac{dB}{dt} \cdot S = 2 \cdot 10^{-5}$ V.

Scanned with OKEN Scanner

4.5.2. $\varphi = BS\cos\theta = BS\cos\omega t$, $e = -\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega BS\sin\omega t$;

$\omega = 2\pi\nu$, $\varphi_{max} = BS$, $E_{max} = \omega BS$.

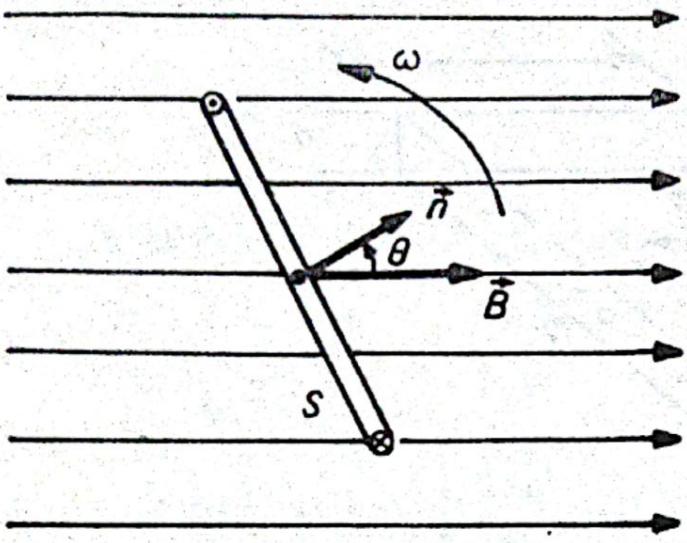


Fig. 4.5.2. R.

4.5.3. $\varphi = BS\cos\alpha\cos\theta = BS\cos\alpha\cos\omega t$,

$e = -\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega BS\cos\alpha\sin\omega t$;

$E_{max} = 2\pi\nu BS\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{E_{max}}{2\pi\nu BS} = 0{,}5$, $\alpha = 60°$.

4.5.4. $e = lvB = 0{,}4$ V.

4.5.5. $e = avB$, $v = \dfrac{a}{T}$,

$B = \mu_0\dfrac{NI}{l} \Rightarrow e = \mu_0\dfrac{NI}{l}\dfrac{a^2}{T} = 1{,}256\cdot 10^{-6}$ V

4.5.6. $i_1 = I_1\sqrt{2}\sin\omega t$, $\omega = 2\pi\nu$; $e_2 = -\dfrac{d\varphi_{21}}{dt} = -L_{12}\dfrac{di_1}{dt} = -\omega L_{12} I_1\sqrt{2}\times\cos\omega t = E_2\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$E_2 = \omega_1 L_{12} I_1$;

$L_{12} = \mu_0\dfrac{N_1 N_2}{l} S_2\cos\alpha$ (v.4.2.7).

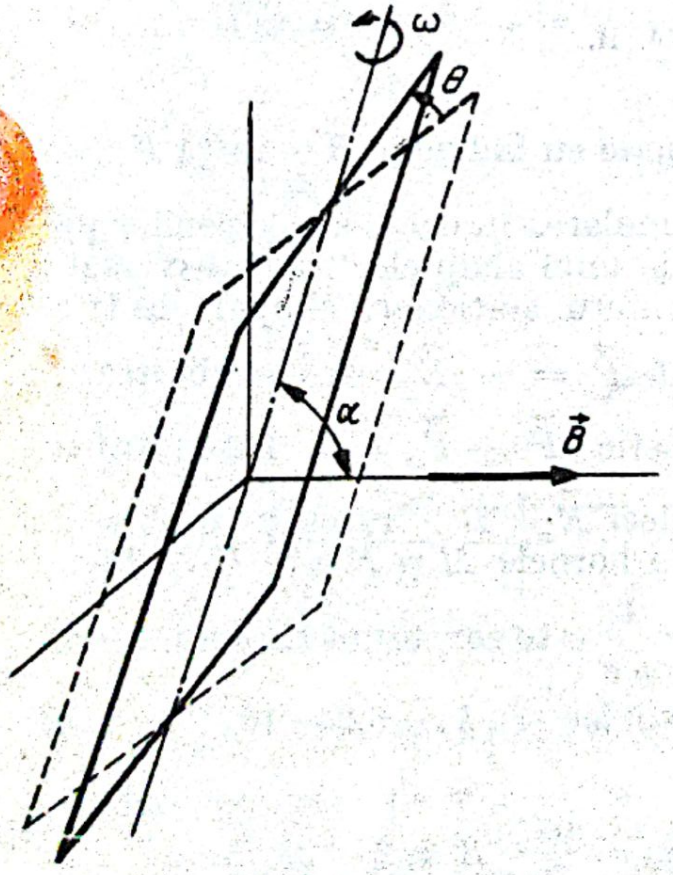


Fig. 4.5.3. R.

a) $E_2 = 99{,}4$ mV;

b) $E_2 = 86{,}1$ mV;

c) $E_2 = 49{,}6$ mV;

d) $E_2 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

4.5.7. Rezistențele celor două bucle ale conductorului sînt $R_1 = 2\pi r_1 \cdot R_l$ și $R_2 = 2\pi r_2 \cdot R_l$. Pentru cazul din fig. 4.5.7, a, se alege de-a lungul conductorului sensul de referință din fig. 4.5.7. R, a, căruia îi corespund, conform regulii burghiului drept, normalele pozitive $\vec{n}_1$ și $\vec{n}_2$ la cele două bucle ale circuitului. Fluxul prin bucla (c_1) rezultă $\varphi_1 = \vec{B}\vec{n}_1 S_1 = BS_1 = \pi r_1^2 B$, prin bucla (c_2) $\varphi_2 = \vec{B}\vec{n}_2 S_2 = -BS_2 = -\pi r_2^2 B$, astfel încît fluxul total prin suprafața limitată de conductor este $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \pi (r_1^2 - r_2^2) B$.

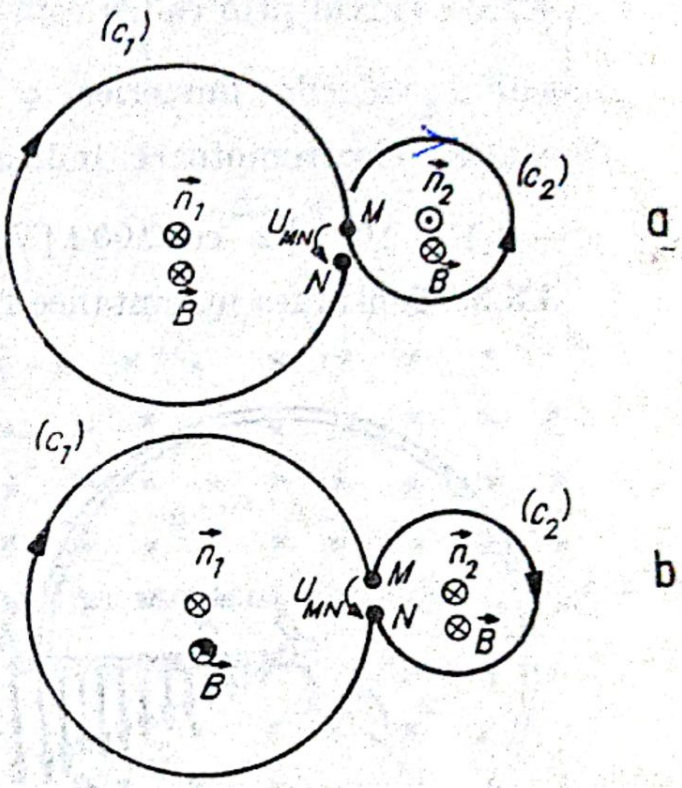


Fig. 4.5.7. R.

a) Tensiunea electromotoare totală indusă în conductor $e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\pi (r_1^2 - r_2^2) \frac{dB}{dt} = -4{,}71 \cdot 10^{-3}$ V;

b) $I = \frac{e}{R_1 + R_2} = -\frac{r_1 - r_2}{2 R_1} \frac{dB}{dt} = -2{,}5 \cdot 10^{-3}$ A;

c) $U_{MN} = e_1 - R_1 I = -\frac{d\varphi_1}{dt} - R_1 I = -\pi r_1 r_2 \frac{dB}{dt} = -3{,}14 \cdot 10^{-3}$ V.

Pentru cazul din fig. 4.4.7, b, alegînd sensurile de referință ca în fig. 4.5.7. R, b, se obțin similar fluxurile

$$\varphi_1 = \vec{B}\vec{n}_1 S_1 = BS_1 = \pi r_1^2 B, \quad \varphi_2 = \vec{B}\vec{n}_2 S_2 = BS_2 = \pi r_2^2 B$$

și

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \pi (r_1^2 + r_2^2) B.$$

a) $e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\pi (r_1^2 + r_2^2) \frac{dB}{dt} = -7{,}85 \cdot 10^{-3}$ V;

b) $I = \frac{e}{R_1 + R_2} = -\frac{r_1^2 + r_2^2}{2 (r_1 + r_2) R_l} \cdot \frac{dB}{dt} = -4{,}16 \cdot 10^{-3}$ A;

Scanned with OKEN Scanner

c) $U_{MN} = e_1 - R_1 I = -\frac{d\varphi_1}{dt} - R_1 I = \frac{\pi r_1 r_2 (r_2 - r_1)}{r_1 + r_2}\frac{dB}{dt} \approx$
$\approx -1{,}05 \cdot 10^{-3}$ V.

4.5.8. Fluxul prin cadru este $\varphi = \frac{\mu_0 b i}{2\pi} \ln \frac{c+a}{c}$ (v. 4.2.8 b) sau, înlocuind valorile numerice, $\varphi = 4{,}16 \cdot 10^{-7} \sqrt{2}\, I \sin 100\, t$ [Wb]. Tensiunea electromotoare indusă în cadru $e = -\frac{d\varphi}{dt} =$
$= -4{,}16 \cdot 10^{-5} \sqrt{2} \cos 100\, t$ [V].

4.5.9. Tensiunea instantanee la bornele celei de-a doua bobine este

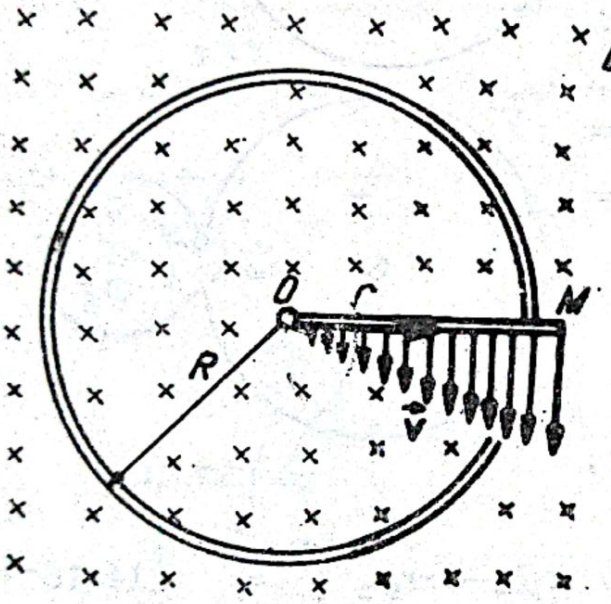


Fig. 4.5.11. R.

$$u_2 = -e_2 = \frac{d\varphi_{21}}{dt} = L_{12}\frac{di_1}{dt},$$

unde

$$i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin \omega t,$$

adică

$u_2 = \omega L_{12} I_1 \sqrt{2} \cos \omega t$. Valoarea efectivă a tensiunii $U_2 = \omega L_{12} I_1$. La problema 4.2.6 s-a calculat $L_{12} = 6{,}33 \cdot 10^{-5}$ H, astfel încît

$$I_1 = \frac{U_2}{\omega L_{12}} = 15{,}8 \text{ A}.$$

4.5.10. $U = dvB$, $v = \frac{U}{dB}$; $D_v = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi d U}{4B} = 0{,}786 \cdot 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}$.

4.5.11. $U_{ab} = -E_{ab} = \int_0^R vB\, dr$; $v = \omega r \Rightarrow U_{ab} = \omega B \int_0^R r dr =$
$= \frac{\omega B R^2}{2}$.

4.5.12. $U_{ab} = \frac{\omega B R^2}{2} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ V.

4.5.13. $e = -\frac{d\varphi}{dt} = -L\frac{di}{dt} = 10^{-2} e^{-t}$ [V].

Scanned with OKEN Scanner

4.5.14. După scurtcircuitarea bobinei la momentul $t = 0$, curentul prin aceasta este menţinut de tensiunea electromotoare de autoinducţie

$$e = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

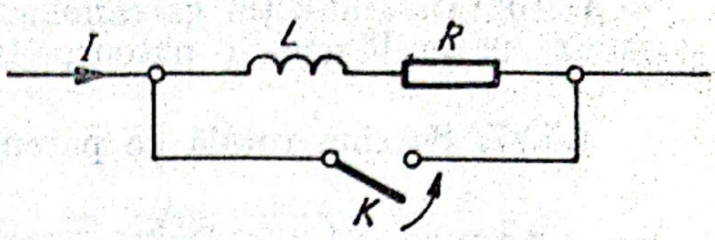


Fig. 4.5.14. R.

Rezultă succesiv :

$$Ri = e,\ Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0;\ \frac{\mathrm{d}i}{i} = -\frac{R}{L}\,\mathrm{d}t,\quad \int_I^i \frac{\mathrm{d}i}{i} = -\frac{R}{L}\int_0^t \mathrm{d}t$$

şi

$$i = I\,e^{-\frac{R}{L}t} = \mathrm{e}^{-10^3\,t}\,\mathrm{A}.$$

Puterea dezvoltată în bobină la un moment dat este $p = Ri^2$, iar cantitatea totală de căldură este $Q = \int_0^\infty p\mathrm{d}t = \int_0^\infty Ri^2\,\mathrm{d}t =$ $= RI^2\int_0^\infty e^{-\frac{2R}{L}t}\,\mathrm{d}t = \frac{LI^2}{2} = 5\cdot 10^{-4}$ J. Conform principiului conservării energiei, cantitatea de căldură dezvoltată în bobină după scurtcircuitarea acesteia trebuie să fie egală cu energia iniţială a bobinei. Rezultă că din calculul anterior se obţine şi expresia energiei cîmpului magnetic al unei bobine : $W_L = \frac{LI^2}{2}$.

4.5.15. $e = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, $\varphi = Mi \Rightarrow |e| = M\left|\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right| = M\frac{\Delta I}{\Delta t} = 10$ V.

4.5.16. Fluxul total al solenoidului în starea iniţială este $\varphi_i = NSB =$ $= 10^{-2}$ Wb, iar în starea finală $\varphi_f = NSB\cos\alpha = 0{,}5\cdot 10^{-2}$ Wb. Tensiunea electromotoare indusă în timpul rotirii este $e =$ $= -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$. iar intensitatea curentului din circuit $i = \frac{e}{R}$. Sarcina electrică transportată prin galvanometru într-un interval scurt de timp Δt este $\Delta q = i\,\Delta t = -\frac{1}{R}\Delta\varphi$. Sarcina totală ce parcurge înfăşurarea

galvanometrului la rotirea solenoidului este $q = -\frac{\varphi_f - \varphi_i}{R} = 5 \cdot 10^{-5}$ C. Indicaţia galvanometrului balistic este proporţională cu sarcina totală care îi parcurge înfăşurarea : $\theta = K \cdot q = 100$ div.

4.5.17. Sarcina totală ce parcurge spira este $q = \frac{\varphi_i - \varphi_f}{R}$.

(v. 4.5.16). a) $\varphi_i = \varphi$, $\varphi_f = 0$, $q = \frac{\varphi}{R} = 10^{-3}$ C; b) $\varphi_i = \varphi$, $\varphi_f = -\varphi$, $q = \frac{2\varphi}{R} = 2 \cdot 10^{-3}$ C.

4.5.18. Fluxul magnetic prin spiră cînd este rotită cu un unghi θ din poziţia în care fluxul este maxim, are valoarea $\varphi = \Phi \cos\theta = \Phi \cos \omega t$. Tensiunea electromotoare indusă în spiră este $e = -\frac{d\varphi}{dt} = \omega \Phi \sin \omega t$, iar curentul care o parcurge are intensitatea $i = \frac{e}{R} = \frac{\omega \Phi}{R} \sin \omega t$.

Puterea instantanee dezvoltată în spiră este $p = Ri^2 = \omega^2 \Phi^2 \sin^2 \omega t$.

a) Intensitatea maximă a curentului rezultă $I_{max} = \frac{\omega \Phi}{R} = \frac{2\pi \nu \Phi}{R} = 6{,}28 \cdot 10^{-2}$A.

b) Puterea medie din spiră este egală cu cantitatea de căldură dezvoltată în decurs de o perioadă, împărţită la durata acesteia

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{\omega^2\Phi^2}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t\,dt = \frac{\omega^2\Phi^2}{T}\int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{\omega^2\Phi^2}{2} = \frac{RI_{max}^2}{2} \approx 19{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ W}.$$

4.6.1. a) $e = lvB = 10^{-1}$ V; b) $i = \frac{e}{R} = 1$A; c) $F = F_m = ilB = 0{,}1$ N; d) $P_m = F \cdot v = 0{,}1$ W, $P_R = Ri^2, = 0{,}1$ W; $P_R = P_m$.

Scanned with OKEN Scanner

4.6.2. a) $e = lvB = 10^{-1}$ V; b) Lungimea totală a porțiunilor barelor fixe, incluse în circuit la un moment t, este $2vt$ (fig. 4.6.2. R, a), rezistența totală a circuitului în acest moment este $R_t = R + 2\,vtR_l = (0{,}1 + 0{,}04t)\,\Omega$ și intensitatea curentului $i = \dfrac{1}{1+0{,}4t}$ A.

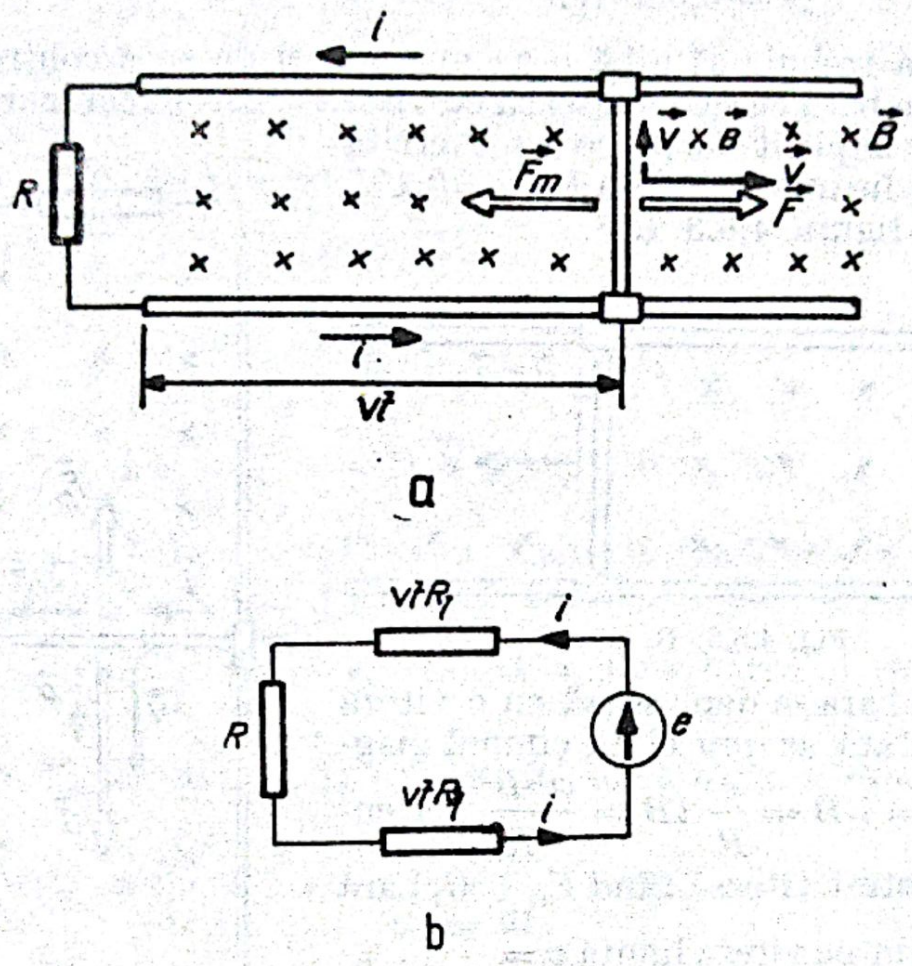


Fig. 4.6.2 R

În figura 4.6.2. R,b este reprezentată schema echivalentă a sistemului de bare. c) $F = F_m = ilB = \dfrac{0{,}1}{1+0{,}4t}$ N. d) Puterea mecanică $P_m = F \cdot v = \dfrac{0{,}1}{1+0{,}4t}$ W;

puterea electrică totală $P_e = ei = \dfrac{0{,}1}{1+0{,}4\,t}$ W;

puterea dezvoltată în rezistor $P_R = Ri^2 = \dfrac{0{,}1}{(1+0{,}4\,t)^2}$ W;

Scanned with OKEN Scanner

puterea dezvoltată în bare $P_b = 2vtR_l \cdot i^2 = \frac{0{,}04\,t}{(1+0{,}4\,t)^2}$ W. Conform principiului conservării energiei $P_m = P_e = P_R + P_b$. Puterea dezvoltată în bare P_b este maximă cînd $\frac{dP_b}{dt} = 0$. Rezultă $t_{max} = 2{,}5$ s și $P_{b\,max} = 0{,}025$ W.

4.6.3. Sursa trebuie să aibă o t.e.m egală și de sens contrar cu t.e.m. indusă în bara ce se deplasează cu viteza v, astfel încît curentul prin circuit și, implicit forța ce se exercită asupra barei să fie nule. Rezultă $E = e = 0{,}1$ V, cu sensul din figura 4.6.3 R.

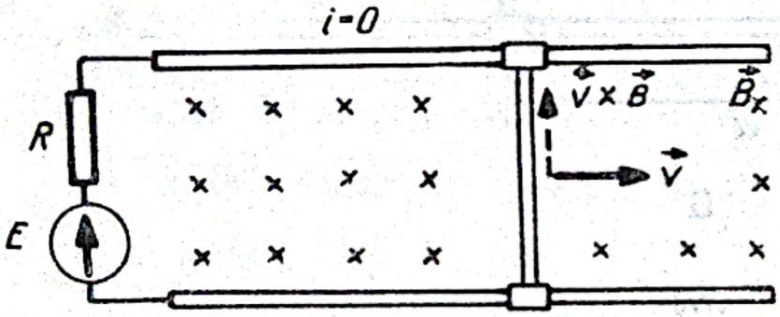


Fig. 4.6.3. R.

4.6.4. Cînd bara se deplasează cu o viteză v, forța exercitată asupra ei în cîmpul magnetic este $F_m = ilB = \frac{e}{R}\,lB = \frac{vl^2B^2}{R}$, orientată în sens contrar vitezei. Cînd $F_m = G$, bara se mișcă uniform cu viteza limită $v_l = \frac{mgR}{l^2B^2} =$ $= 9{,}8$ m/s.

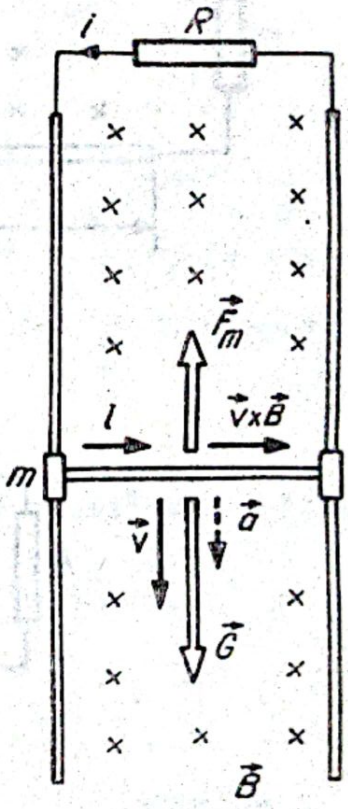


Fig. 4.6.5. R.

4.6.5. Accelerația mișcării barei într-un moment cînd are viteza v este dată de relația $ma = G - F_m = mg - \frac{vl^2B^2}{R}$. Înlocuind $a = \frac{dv}{dt}$ și separînd variabilele, rezultă

$$\frac{dv}{v - \frac{mgR}{l^2B^2}} = -\frac{l^2B^2}{mR}\,dt,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\int_0^v \frac{dv}{v - v_l} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t dt,$$

unde $v_l = \frac{mgR}{l^2B^2} = 9{,}8$ m/s este viteza limită a barei, iar $\tau = \frac{mR}{l^2B^2} = 1$ s este constanta de timp a procesului. S-a ținut seama că la momentul $t = 0$ viteza este nulă. Se obține

$$\ln\frac{v_l - v}{v_l} = -\frac{t}{\tau}$$

și

$$v = v_l\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 9{,}8\ \left(1 - e^{-t}\right)\ \text{m/s}.$$

4.6.6. Cînd bara are viteza v, t.e.m. indusă este $e = lvB$, iar curentul prin condensatorul avînd tensiunea la borne $u = e$ este $i = C\frac{de}{dt} = ClB\frac{dv}{dt}$. Forța exercitată asupra barei în cîmpul magnetic este $F_m = ilB = Cl^2B^2\frac{dv}{dt}$, astfel încît legea a doua a mecanicii se scrie $m\frac{dv}{dt} = mg - Cl^2B^2\frac{dv}{dt}$. Rezultă că bara se mișcă cu accelerația constantă $a = \frac{dv}{dt} = \frac{mg}{m + Cl^2B^2} = 8{,}9$ m/s², legea de variație a vitezei fiind $v = at = 8{,}9t$ m/s.

4.6.7. a) Viteza cu care bara intră în întrefierul electromagnetului este $v_1 = \sqrt{2gh_1} = 2{,}8$ m/s. Forța exercitată în cîmpul magnetic asupra barei este $F_m = ilB = \frac{e}{R}lB = \frac{v_1l^2B^2}{R}$. Deoarece bara se mișcă uniform $F_m = G$, astfel încît $B = \sqrt{\frac{mgR}{l^2v_1}} = 1{,}75$ T. b) Timpul în care bara parcurge distanța h_1 este $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 0{,}286$ s, iar

timpul în care parcurge distanţa h_3 este $t_3 = \frac{v_c - v_1}{g} = 0{,}143$ s. Rezultă durata mişcării în întrefier $t_2 = t_c - t_1 - t_3 = 0{,}0715$ s şi lărgimea acestuia $h_2 = v_1 t_2 = 0{,}2$ m. Distanţa pînă la opritor este $h_3 = v_1 t_3 + \frac{g t_3^2}{2} = \frac{v_c^2 - v_1^2}{2g} = 0{,}5$ m. c) $Q = mgh_2 = 0{,}1372$ J. d) Viteza cu care bara ajunge în acest caz în întrefier este $v_1' = \sqrt{2gh_1'} = 1{,}4$ m/s, t.e.m. indusă în bară este $e' = lv_1' B = 0{,}49$ V, intensitatea curentului prin circuit $i' = \frac{e + E}{R + r}$ şi forţa exercitată în cîmp magnetic asupra barei $F_m' = i'lB$. Din condiţia $F_m' = G$, se obţine $E = \frac{mg(R + r)}{lB} - e = 1{,}47$ V, sensul t.e.m. a sursei fiind acelaşi cu al t.e.m. induse în bară.

4.6.8. $e = \vec{l}(\vec{v} \times \vec{B}) = lvB \sin \alpha$, $i = \frac{e}{R}$, $F_m = ilB = \frac{vl^2 B^2}{R} \sin \alpha$;

$F_m = G \Rightarrow v_l = \frac{mg R}{l^2 B^2 \sin \alpha} = 15{,}68$ m/s.

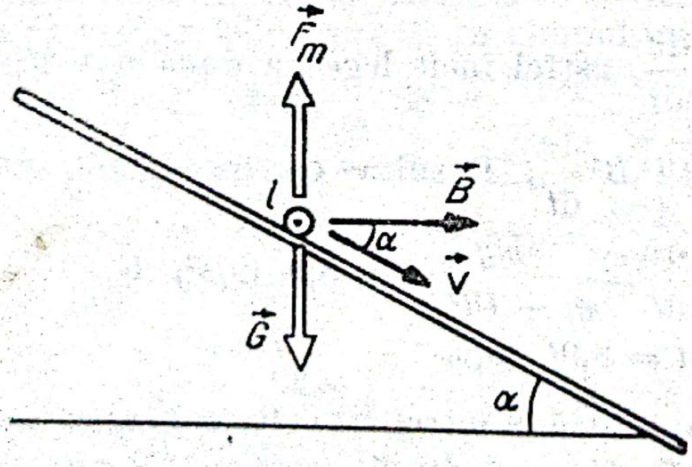


Fig. 4.6.8. R.

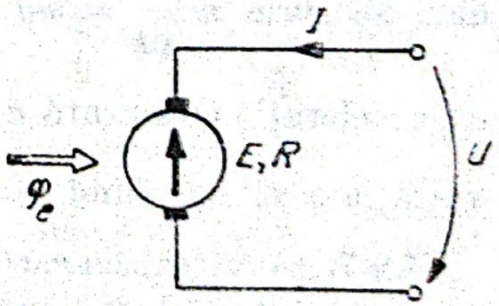


Fig. 4.7.1. R.

4.7.1. Fluxul de excitaţie φ_e produs de magnetul permanent este constant, astfel încît tensiunea contraelectromotoare indusă în înfăşurarea rotorică depinde numai de turaţia rotorului : $E = Kn$. Ecuaţia circuitului rotoric este $U = E + RI$. Se găseşte turaţia rotorului $n = \frac{U - RI}{K}$. Pentru $I = \text{const.}$, se obţine $\Delta n = \frac{\Delta U}{K}$.

Scanned with OKEN Scanner

La mers în gol $I = 0$ și $n_0 = \frac{U}{K}$. Rezultă $n_0 = \frac{U}{\Delta U}$. $\Delta n =$ $= 900$ rot/min.

4.7.2. Tensiunea contraelectromotoare indusă în înfășurarea rotorică este $E = k_e n I_e$. Ecuația circuitului rotoric este $U = E + RI$. La mers în gol $I = 0$, $U = E$, deci $k_e = \frac{U}{n_0 I_e} = 4{,}8$ H.

a) Puterea mecanică dezvoltată de motor este $P_m = EI = E\frac{U-E}{R} =$ $= 11{,}52\, n\,(25 - n)$ [W], unde turația n este exprimată în rotații pe secundă. b) Momentul M al motorului se obține din relația $P_m = M\omega$, unde $\omega = 2\pi n$ este viteza unghiulară a rotorului, adică $M =$ $= 1{,}835\,(25 - n)$ [N.m]. c) Turația la mers în gol este $n_0 = \frac{U}{k_e I_e} = \frac{25}{I_e}$ rot/s.

Se observă că întreruperea circuitului de excitație ($I_e = 0$) duce la ambalarea motorului (n_0 crește foarte mult).

4.7.3. $E_1 = k_e n_1 I_e \Rightarrow k_e I_e = \frac{E_1}{n_1}$. a) $I = 0$; $n_0 = \frac{U}{k_e I_e} = \frac{U}{E_1} n_1 =$ $= 2\,500$ rot/min $= 41{,}7$ rot/s; b) $P_m = M\omega$, $M = \frac{l}{2\pi} \cdot G$, $\omega =$ $= 2\pi n \Rightarrow P_m = nlG$; $P_m = EI$, $I = \frac{U-E}{R}$, $E = k_e n I_e = U\frac{n}{n_0}$ $\Rightarrow P_m = \frac{U^2}{R}\frac{n}{n_0}\left(1 - \frac{n}{n_0}\right) \Rightarrow n = n_0\left(1 - \frac{n_0 lGR}{U^2}\right) = 36{,}7$ rot/s; c) $I =$ $= \frac{U}{R}\left(1 - \frac{n}{n_0}\right) = 120$ A; d) $P_m = nlG = EI = 21{,}1$ kW, $P_e = UI =$ $= 24$ kW; e) $\eta = \frac{P_m}{P_e} = \frac{E}{U} = \frac{n}{n_0} = 88\%$.

4.7.4. $v' = -n'l \Rightarrow n' = -\frac{v'}{l} = -2$ rot/s (semnul minus indică rotirea în sens invers față de momentul motorului). a) Din relația

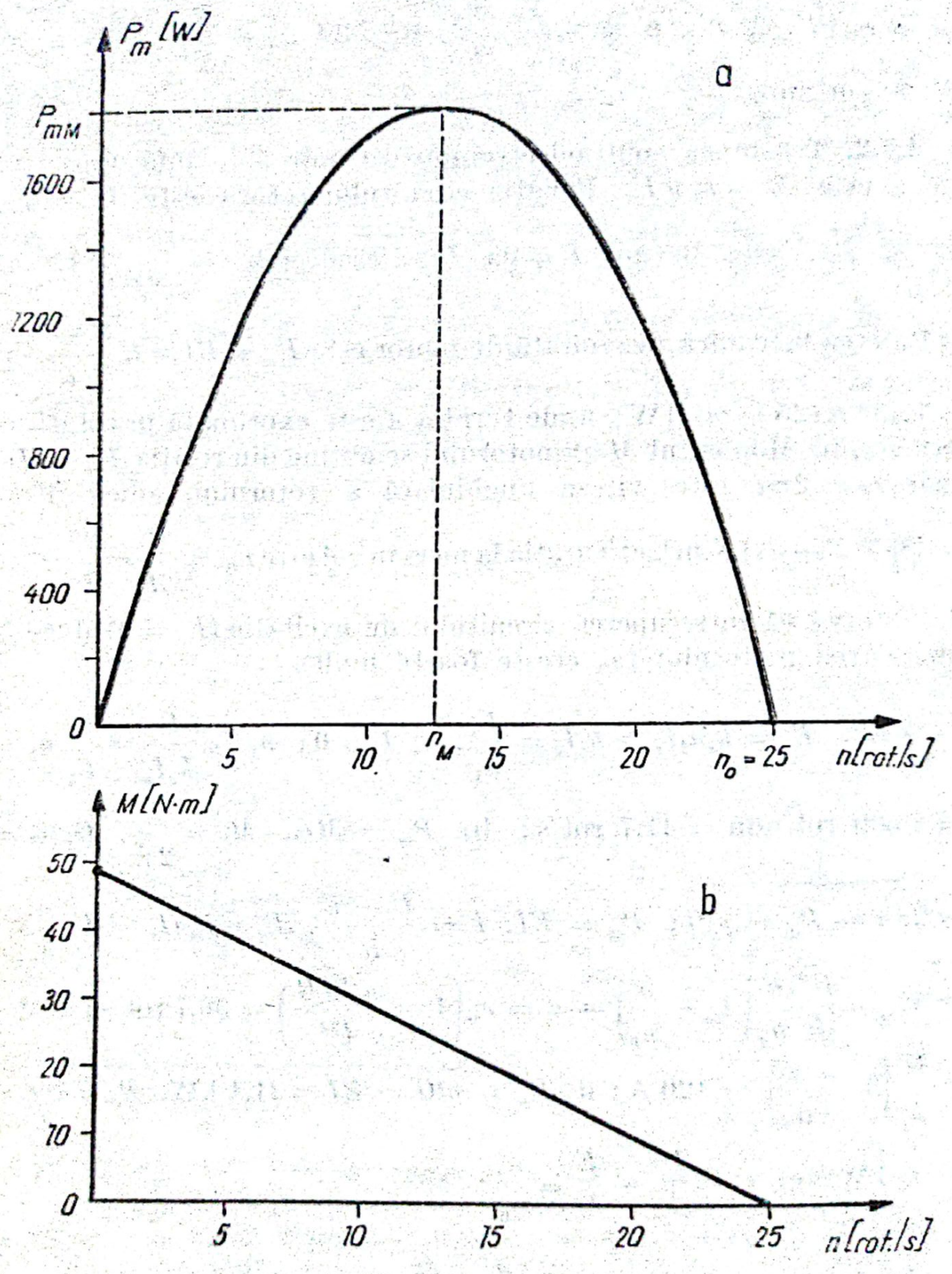


Fig. 4.7.2. R. (a, b)

Scanned with OKEN Scanner

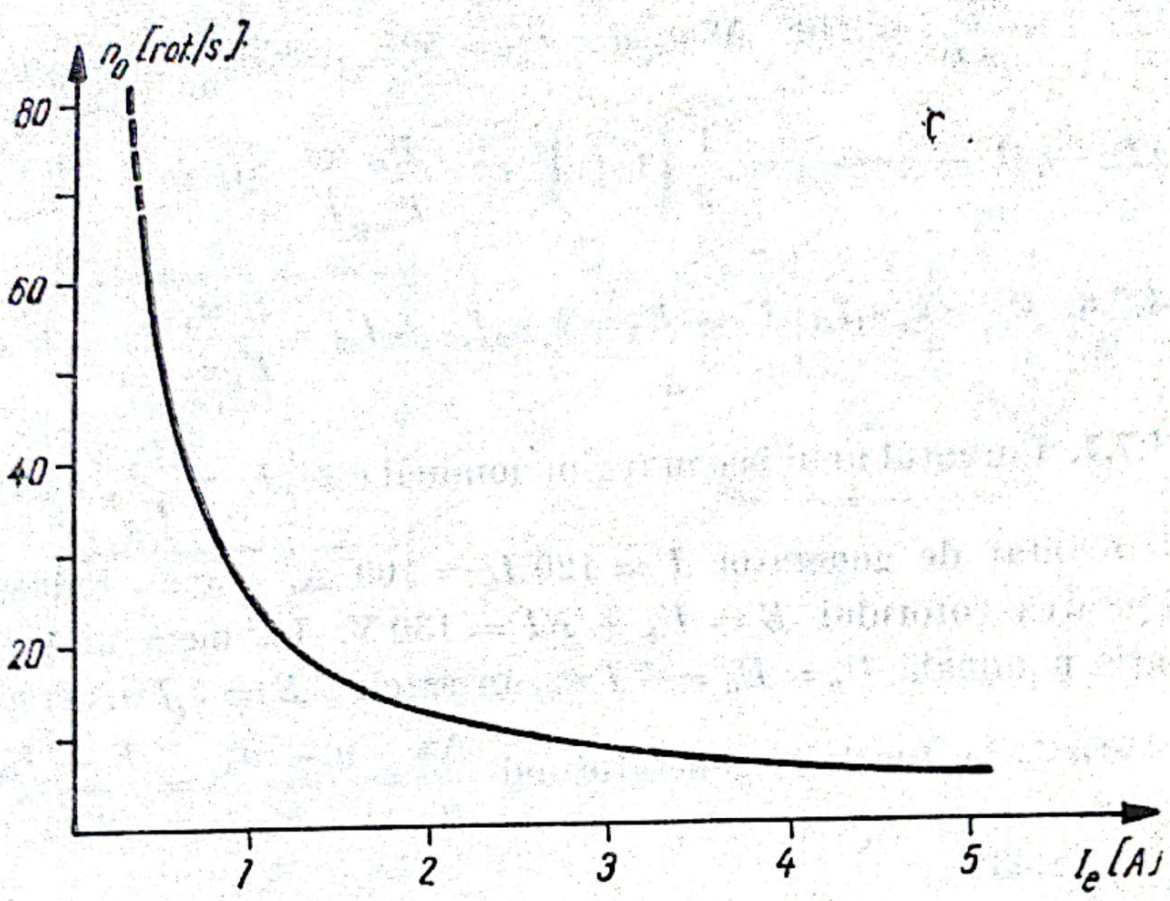


Fig. 4.7.2. R. c

stabilită la 4.7.3, b: $U' = n_0 \sqrt{\frac{lG'R}{n_0 - n'}} = 21{,}9$ V. b) $I' = \frac{U' - E'}{R} =$

$= \frac{U'}{R}\left(1 - \frac{n'}{n_0}\right) = 114{,}8$ A. c) Puterea mecanică primită $P'_m = v'G' =$

$= 120$ W, puterea electrică primită $P'_e = U'I' = 2514$ W, puterea pierdută în înfăşurare sub formă de căldură $P'_{Cu} = RI'^2 = 2634$ W. Se verifică $P'_{Cu} = P'_m + P'_e$. d) $n'' = -n' = 2$ rot/s, $U'' =$

$= n_0 \sqrt{\frac{lG'R}{n_0 - n''}} \approx 23$ V.

4.7.5. a) $U = E_1 + RI_1 = k_e I_e n_1 + RI_1$, $U = k_e I_e n_2 + RI_2$

$\Rightarrow R = \frac{(n_1 - n_2)U}{n_1 I_2 - n_2 I_1} = 1{,}5\,\Omega$; b) $P_m = \frac{U^2}{R}\frac{n}{n_0}\left(1 - \frac{n}{n_0}\right)$, $P_m = max \Rightarrow$

$\Rightarrow n_M = \frac{n_0}{2}$; $n_0 = \frac{U}{k_e I_e} = \frac{U}{U - RI_1} n_1 = 17{,}8$ rot/s, $n_M = 8{,}9$ rot/s;

Scanned with OKEN Scanner

c) $P_{m_M} = \frac{U^2}{4R} = 2400$ W; d) $\eta_M = 50\%$; e) $\frac{n}{n_0} = \eta$, $P_m =$

$= 4P_{m_M}\eta(1-\eta) \Rightarrow \eta = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{P_m}{P_{m_M}}}\right) = 97{,}4\%$.

4.7.6. $E_1 = k_e n_1 I_{e1}$, $U = E_2 = k_e n_2 I_{e2} \Rightarrow I_{e2} = \frac{U}{E_1}\frac{n_1}{n_2} I_{e1} = 1$ A.

4.7.7. Curentul unui bec în regim nominal este $I_b = \frac{P_b}{U_b}$, curentul total debitat de generator $I = 120\, I_b = 100$ A. T.e.m. indusă în înfăşurarea rotorului $E = U_b + RI = 130$ V. La mers în gol, la turaţia nominală $U_0 = E_0 = k_e I_e n_N$, în sarcină $E = k_e I_e n$. Creşterea procentuală a turaţiei generatorului $\frac{\Delta n}{n_N} = \frac{n - n_N}{n_N} = \frac{E - U_0}{U_0} =$

$= \frac{1}{12} = 8{,}33\%$.

4.7.8. Pentru conexiunea paralel (fig. 4.7.8. R, a): $E = k_e n I_e$,

$$U = E + RI,$$

$$U = R_e I_e,$$

$$P_m = EI = \frac{U^2}{R}\frac{n}{n_0}\left(1 - \frac{n}{n_0}\right),$$

$$P_e = U(I + I_e) = U^2\left[\frac{1}{R}\left(1 - \frac{n}{n_0}\right) + \frac{1}{R_e}\right],$$

$$n_0 = \frac{P_e}{k_e}.$$

Puterea mecanică maximă corespunde turaţiei $n_M = \frac{n_0}{2}$, pentru care $P_{m_M} = \frac{U^2}{4R}$ şi $P_{eM} = U^2\left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{R_e}\right)$. Randamentul în regi-

Scanned with OKEN Scanner

mul de putere mecanică maximă a motorului în conexiunea derivației este $\eta_{d_M} = \frac{P_{m_M}}{P_{e_M}} = \frac{R_e}{2(R_e + 2R)} = 45{,}5\%$.

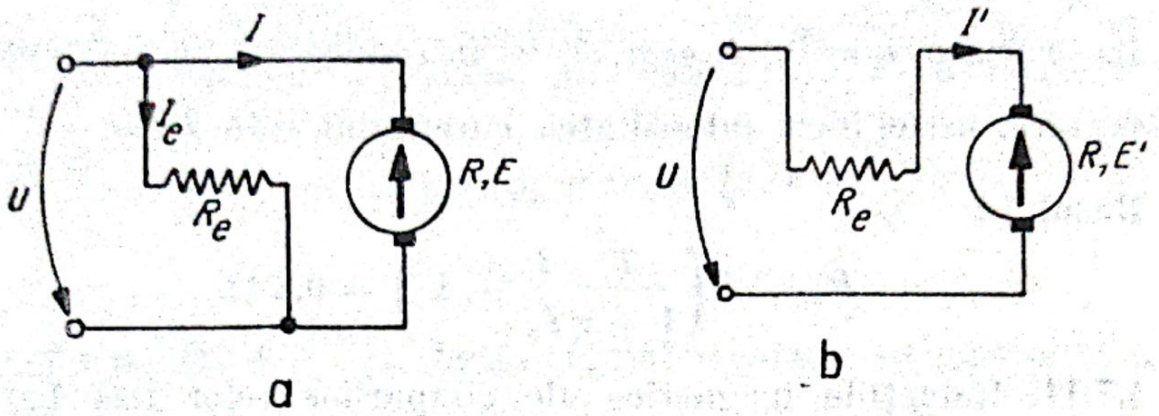


Fig. 4.7.8. R. (a, b)

În cazul conexiunii serie (fig. 4.7.8. R, b): $E' = k_e n' I'$,

$$U' = E' + (R + R_e) I' = (k_e n' + R + R_e) I',$$

$$P'_m = E' I' = \frac{k_e n' U^2}{(k_e n' + R + R_e)^2}, \quad P = UI' = \frac{U^2}{k_e n' + R + R_e}.$$

Puterea mecanică este maximă la $n'_M = \frac{R + R_e}{k_e}$ și are valoarea $P'_{m_M} = \frac{U^2}{4(R + R_e)}$; corespunzător $P'_{e_M} = \frac{U^2}{2(R + R_e)}$. Randamentul în regimul de putere maximă este

$$\eta_{s_M} = \frac{P'_{m_M}}{P'_{e_M}} = 50\%.$$

Rezultă

$$\frac{\eta_{d_M}}{\eta_{s_M}} = \frac{R_e}{R_e + 2R} = 0{,}91.$$

4.7.9. Pentru a evita șocul de curent la pornire, reostatul R_r din circuitul rotoric trebuie reglat la rezistența maximă, iar reostatul R_e din circuitul de excitație la rezistența minimă.

Scanned with OKEN Scanner

4.7.10. În regim stabilit: $U = E + RI$, $\eta = \frac{P_m}{P_e} = \frac{E}{U} \Rightarrow I = \frac{U - E}{R} = \frac{U}{R}(1 - \eta)$.

La pornire $n = 0$, $E = 0$ și se introduce în serie reostatul de pornire, astfel încît intensitatea curentului este $I_p = \frac{U}{R + R_p}$.

Rezultă:

$$R_p = R\left(\frac{1}{1 - \eta}\frac{I}{I_p} - 1\right) = 0{,}4\ \Omega.$$

4.7.11. Inducțiile magnetice ale cîmpurilor celor trei bobine, parcurse de sistemul trifazat de curenți, sînt: $B_1 = B_0 \frac{I}{I_0}\sqrt{2}\sin \omega t$, $B_2 = B_0 \frac{I}{I_0}\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$ și $B_3 = B_0 \frac{I}{I_0}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$.

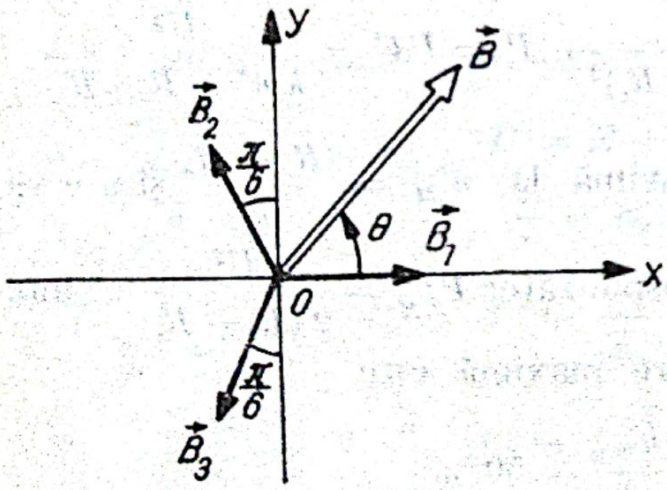


Fig. 4.7.11. R.

Inducția cîmpului magnetic rezultant este $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$.

Componentele sale sînt $B_x = B_1 - (B_2 + B_3)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}B_0\frac{I}{I_0}\sqrt{2}\sin\omega t$ și $B_y = (B_2 - B_3)\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{3}{2}B_0\frac{I}{I_0}\sqrt{2}\cos\omega t$. Modulul inducției magnetice rezultante este constant $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2}B_0\frac{I}{I_0}\sqrt{2} = 0{,}106$ T. Unghiul θ față de semiaxa Ox (fig. 4.7.11. R) este dat de relația $\operatorname{tg}\theta = \frac{B_y}{B_x} = -\operatorname{tg}\omega t$, de unde $\theta = -\omega t$. Sistemul de bobine produce deci în punctul O un cîmp magnetic învîr-

Scanned with OKEN Scanner

titor, ce se roteşte cu turaţia $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 50$ rot/s, în sens orar.

4.7.12. $I' = \frac{3}{2} I \sqrt{2} = 21{,}2$ A; $\Omega = \omega = 100\,\pi$ rad/s, în sens orar.

4.7.13. Luînd originea timpului, $t = 0$, într-un moment cînd fluxul din prima bobină este maxim, fluxurile din cele trei bobine sînt

$$\varphi_1 = \Phi \cos \Omega t, \quad \varphi_2 = \Phi \cos\left(\Omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

şi

$\varphi_3 = \Phi \cos\left(\Omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$, dacă sistemul se roteşte în sens orar. Tensiunile electromotoare induse în bobine sînt

$$e_1 = -\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} = \Omega \Phi \sin \Omega t,$$

$$e_2 = -\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t} = \Omega \Phi \sin\left(\Omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

şi

$$e_3 = -\frac{\mathrm{d}\varphi_3}{\mathrm{d}t} = \Omega \Phi \sin\left(\Omega t + \frac{2\pi}{3}\right),$$

formînd un sistem trifazat simetric de t.e.m. cu valoarea efectivă $E = \frac{\Omega\Phi}{\sqrt{2}} = 1{,}41$ V şi frecvenţa $\nu = \frac{\Omega}{2\pi} = 15{,}9$ Hz.

4.7.14. a) $n_0 = \frac{\nu}{p} = 25$ rot/s $= 1\,500$ rot/min; b) $n = (1 - s)\, n_0 =$ $= 1\,470$ rot/min.

5.1.1. $V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14{,}1$ V, $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100}{2\pi} = \frac{50}{\pi}$ Hz;

$I = \frac{1}{\sqrt{2}}$ A, $f = \frac{1}{2\pi}$ Hz; $U = 10$ V, $f = 50$ Hz.

Scanned with OKEN Scanner

5.1.2. $\varphi_1 = \gamma_{a_1} - \gamma_{b_1} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = (1 - \pi)$ rad; $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$; φ_4 nu e definit, pulsațiile fiind diferite.

5.1.3. $\varphi_1' = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2' = -1 - 0 = -1$ rad.

5.1.4. a) $i = \sqrt{2}\, I \sin(2\pi f t + \alpha)$;

b) $v = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{2} t + \frac{\pi}{180} 30\right)$; c) $v = 10 \sin t$;

d) $I = \sqrt{\frac{i_1^2 + i_2^2}{2}} = 5$ A, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = 35°52'$;

$i = \sqrt{2}\, 5 \sin\left(2\pi \cdot 50 t + \frac{\pi}{180} 35{,}87\right)$ A.

5.1.5. a) $f_1 = f_2 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}02} = 50$ Hz; b) $\gamma_1 = -\omega t_1 = -2\pi \cdot 50 (-25 \cdot 10^{-4}) = \frac{\pi}{4}$ rad, $\gamma_2 = -\omega t_2 = -2\pi \cdot 50 (-50 \cdot 10^{-4}) = \frac{\pi}{2}$ rad; c) $i_1 = \sqrt{2} \cdot 1{,}5 \sin \cdot (2\pi \cdot 50 t + 0{,}25\pi)$ A, $i_2 = \sqrt{2} \sin\left(2\pi \cdot 50 t + \frac{\pi}{2}\right)$ A; d) $\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$, $\varphi_{21} = \gamma_2 - \gamma_1 = \frac{\pi}{4}$.

5.1.6. $V_1^2 = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} V^2\, dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} V^2\, dt = \frac{V^2}{T}\left(\frac{T}{2} - 0\right) + \frac{V^2}{T}\left(T - \frac{T}{2}\right) = V^2$, $V_1 = V$;

Scanned with OKEN Scanner

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_2^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} V^2\,dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}V^2\frac{T}{2}} = \frac{V}{\sqrt{2}};\quad V_3 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{V^2}{T^2}t^2\,dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T^3}V^2\frac{T^3}{3}} = \frac{V}{\sqrt{3}};\quad V_4 = \frac{V_m}{\sqrt{2}};\quad V_5 = \sqrt{\left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)^2 + U^2}.$$

5.1.7. a) $T_2 = \frac{2\pi}{2\omega}$, $T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2T_2 \Rightarrow T = T_1$, b) $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ cu $V_1 = \frac{V_{m1}}{\sqrt{2}}$, $V_2 = \frac{V_{m2}}{\sqrt{2}}$.

5.2.1. Pe baza diagramelor vectoriale din figură, folosind teorema lui Pitagora generalizată se obțin rezultatele de mai jos. Pentru

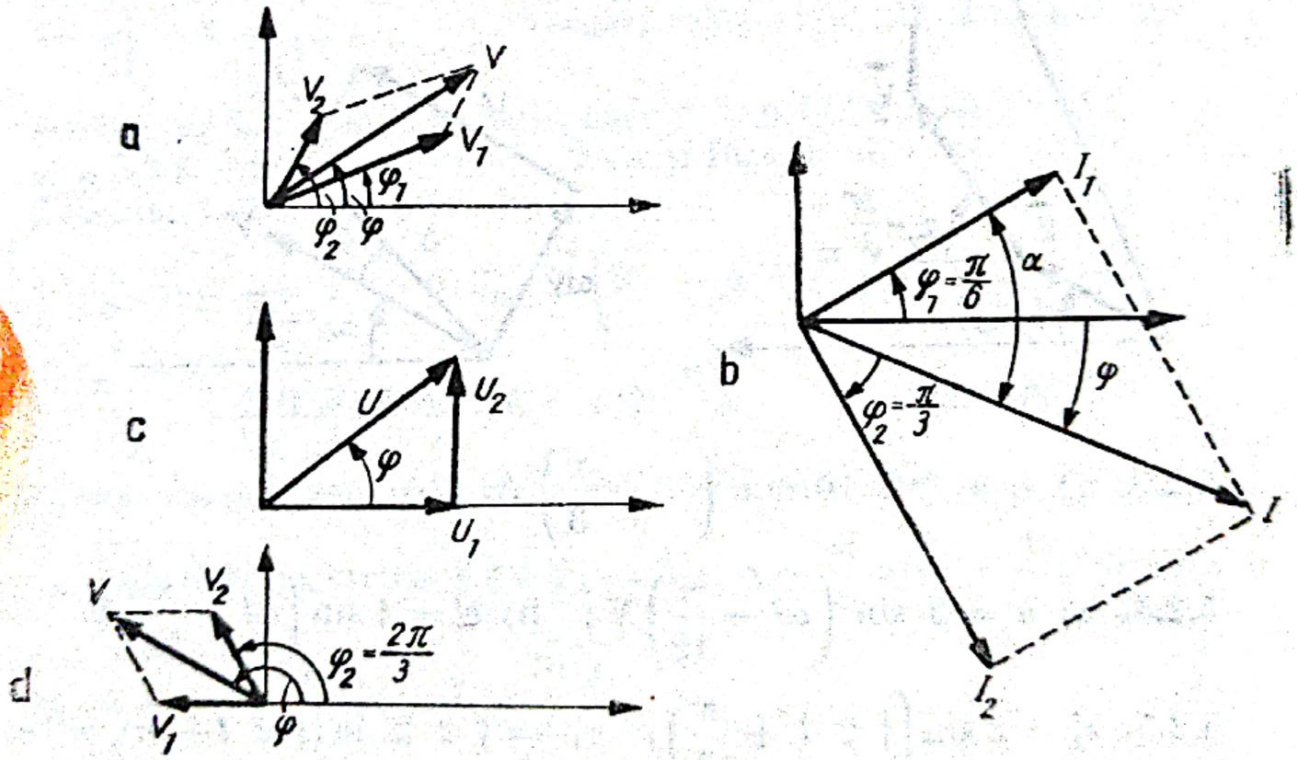


Fig. 5.2.1. R.

i_2, u_2, v_1 se obține în prealabil forma normală, în ca re valoarea maximă înmulțește funcția sinus. Astfel se obțin pentru sumele căutate valorile efective și unghiurile fazice inițiale de mai jos:

a) $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\gamma_1 - \gamma_2)}$,

$\gamma = \gamma_1 + \arccos\frac{V^2 + V_1^2 - V_2^2}{2V_1V_2}$; b) $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 5$,

Scanned with OKEN Scanner

$\gamma = -\gamma_1 \arcsin \frac{I_2}{I} = \left(-\frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{4}{5}\right)$ rad $= -30° + 53°10' =$

$= 23°10'$; c) $U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = 10$, $\gamma = \operatorname{arctg} \frac{U_2}{U_1} = 53°5'$; d) $V =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \cos 60°} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\gamma = 150°$.

5.2.2. Din diagrama vectorială se citește $V = 10{,}8$; $\gamma = 65°$,

$v\left(\frac{T}{3}\right) = \sqrt{2}\, 3 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2}\, 4 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}\, 5 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \right.$

$\left. + \frac{\pi}{2}\right) = 2\left(3 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5\,\frac{1}{2}\right) =$

$= \sqrt{2}\,(5{,}5 + 3{,}46) = \sqrt{2} \cdot 8{,}96 \approx 12{,}7.$

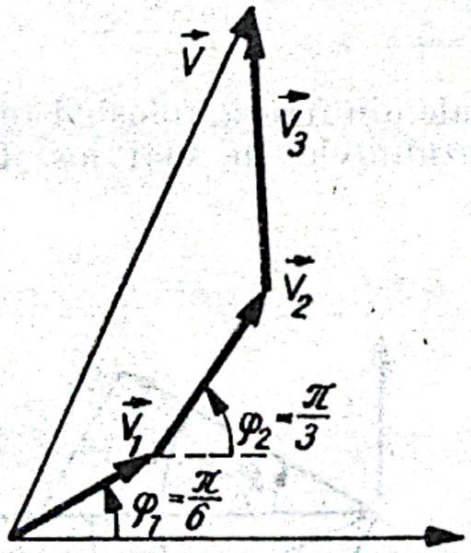


Fig. 5.2.2. R.

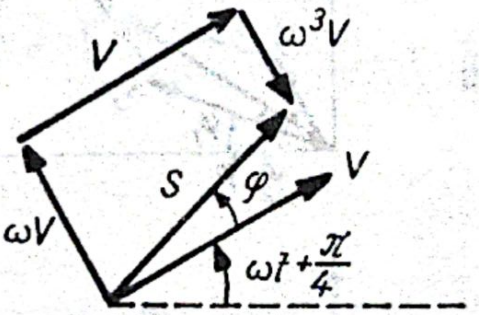


Fig. 5.2.6. R.

5.2.3. a) $i_1 = \sqrt{2}\ 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ A. b) $i_1 = 0$.

5.2.4. a) $u = 2 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{12}\right)$ V; b) $u = 4 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{12}\right)$ V.

5.2.5. $v_1' = 2 \sin\left(\sqrt{2}\ t + \frac{\pi}{2}\right)$, $v_1'' = \sqrt{2}\ 2 \sin(\sqrt{2}\ t + \pi)$, $v_1''' =$

$= 4 \sin\left(\sqrt{2}\ t - \frac{\pi}{2}\right)$; $v_2' = 6 \sin\left(2t + \frac{5\pi}{6}\right)$; $v_2'' = 12 \sin\left(2t + \right.$

$\left. + \frac{8\pi}{6}\right)$; $v_2''' = 24 \sin\left(2t + \frac{11\pi}{6}\right)$; $v_3' = 3 \cos\left(3\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, $v_3'' =$

$= 9 \cos(3\omega t + \pi)$, $v_3''' = 27 \cos\left(3\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$.

5.2.6. Diagrama vectorială a sumei date este reprezentată în figură. Din diagramă rezultă valoarea efectivă a sumei

$$S = \sqrt{(\omega - \omega^3)^2 V^2 + V^2} = \sqrt{1 + \omega - 2\omega^4 + \omega^6}\, V.$$

Defazajul α al sumei s înaintea lui v este dat de relația $\operatorname{tg} \alpha = \frac{(\omega - \omega^3)V}{V} = \omega - \omega^3$. Valoarea instantanee a sumei este $s = \sqrt{2}\, S \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

5.2.7. Înlocuind în ecuația dată valoarea lui x se obține relația $2 X_m \sin(\omega t + \alpha) - 3\omega X_m \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \omega^3 X_m \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 5 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$. Această relație trebuie să fie o identitate și deci suma din membrul întîi, care este o funcție sinusoidală, trebuie să aibă aceeași pulsație $\omega = 2$ ca și funcția din membrul doi. Suma din membrul unu este deci

$$2 X_m \sin(2t + \alpha) - 6 X_m \sin\left(2t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) + 8 X_m \sin\left(2t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\, 2 X_m \sin\left(2t + \alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

Pentru ca această sumă să reprezinte expresia din membrul doi este necesar și suficient ca $\sqrt{2}\, 2X_m = 5$ și $\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$, de unde rezultă $x = \sqrt{2}\, \frac{5}{4} \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{12}\right)$.

5.3.1. $i_5 = \sqrt{6} \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ A, $i_4 = 4\sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ A.

5.3.2. $u_{ab} = \sqrt{6}\, 100 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$, $u_{bc} = \sqrt{6}\, 100 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, $u_{ac} = \sqrt{6} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$ V.

Scanned with OKEN Scanner

5.3.3. $u_1 = \sqrt{27}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, $u_6 = \sqrt{2}\,6\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$ V.

5.3.4. $u_{ad} = \sqrt{2}\,2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, $u_{db} = \sqrt{2}\sqrt{7}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \right.$

$\left. - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $u_{fc} = \sqrt{2}\sqrt{3}\sin(\omega t)$, $u_{bf} = \sqrt{2}\,2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ V.

5.3.5. $i_n = \sqrt{2}\,I\sin(\omega t + \alpha)$, cu

$$I = \sqrt{\left[\sum_{k=1}^{n} I_{km}\cos(k-1)\frac{2\pi}{n}\right]^2 + \left[\sum_{k=1}^{n} I_{km}\sin(k-1)\frac{2\pi}{n}\right]^2} \quad \text{și}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sum_{k=1}^{n} I_{km}\sin(k-1)\frac{2\pi}{n}}{\sum_{k=1}^{n} I_{km}\cos(k-1)\frac{2\pi}{n}}.$$

Dacă valorile maxime sînt egale, $i = 0$.

5.3.6. Tensiunile la bornele surselor ideale sînt egale cu tensiunile lor electromotoare : $u_1 = e_1$, $u_2 = e_2$. Din a doua teoremă a lui Kirchhoff rezultă $u + u_2 - u_1 = 0$ și deci $u = u_1 - u_2$. Ca urmare, $u = e_1 - e_2 = \sqrt{2}\,E_1\sin(\omega t + \gamma_1) + \sqrt{2}\,E_2\sin(\omega t + \gamma_2) = \sqrt{2}\,[(E_1\cos\gamma_1 + E_2\cos\gamma_2)\sin\omega t + (E_1\sin\gamma_1 + E_2\times\sin\gamma_2)\cos\omega t]$.

Folosind notațiile

$$U = \sqrt{(E_1\cos\gamma_1 + E_2\cos\gamma_2)^2 + (E_1\sin\gamma_1 + E_2\sin\gamma_2)^2},$$

$$\cos\gamma = \frac{E_1\cos\gamma_1 + E_2\cos\gamma_2}{U}, \quad \sin\gamma = \frac{E_1\sin\gamma_1 + E_2\sin\gamma_2}{U}$$

rezultă

$$u = \sqrt{2}\,U\sin(\omega t + \gamma).$$

Pentru valorile numerice date, $U = 5$V, $\gamma = 53°10'$.

Același rezultat se poate obține și pe cale grafică.

5.3.7. Circuitul are $n = 2$ noduri (A, B) și $o = 2$ ochiuri (I, II). Ca urmare, din teoremele lui Kirchhoff se obține următorul sistem de ecuații independente :

$(A)\ i - i_1 - i_2 = 0$; $(I)\ u_R + u_1 - u = 0$; $(II)\ u_2 - u_1 = 0$.

Aceste ecuații se transcriu astfel ca ele să exprime fiecare cîte o mărime sub forma unei sume :

$$(A)\ i = i_1 + i_2; \quad (I)\ u = u_1 + u_R; \quad (I)\ u_2 = u_1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, diagramele vectoriale reprezintă cîte un vector ca o sumă de mai mulţi vectori. Orientarea vectorilor se obţine alegînd arbitrar orientarea unui vector curent ($\vec{I}_1$) şi apoi, ţinînd seamă de defazajele cunoscute ale vectorilor tensiune la borne faţă de vectorii curent. Astfel se obţine diagrama din figură, în care vectorii sînt numerotaţi în ordinea construirii lor.

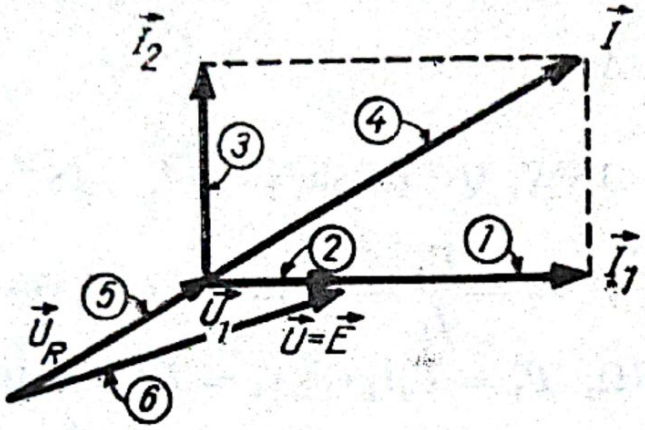


Fig. 5.3.7. R.

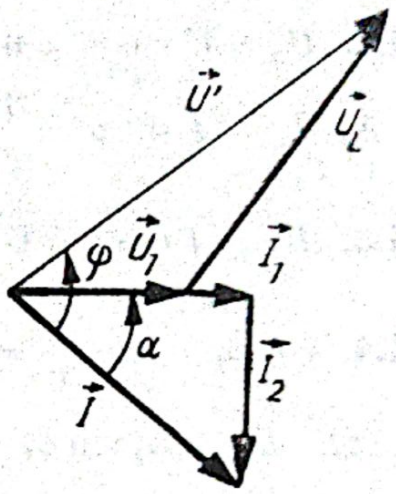


Fig. 5.3.8. R.

5.3.8. Se construieşte diagrama vectorială la scările : $m_I = 5\text{A/cm}$, $m_U = 20\ \text{V/cm}$, în ordinea $\vec{I}_1$, $\vec{U}_1$, $\vec{I}_2$, $\vec{U}_L$, $\vec{U}$.

Se măsoară lungimea vectorului $\vec{U}$ găsindu-se 5,7 cm. La scara folosită această lungime corespunde tensiunii $U \approx 20 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \cdot 4{,}7\ \text{cm} = 94\text{V}$.

Ca urmare, $u = \sqrt{2}\ 94 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{180}\ 39\right)\text{V}$. Se mai măsoară cu raportorul unghiul $\varphi \approx 76°$ şi $\alpha = 37°$. Curenţii sînt proporţionali cu tensiunea aplicată şi se defazează la fel ca această tensiune. Astfel rezultă

$$i'_1 = \frac{100}{94}\sqrt{2}\ 10 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{180}\ 39\right)\text{A};$$

$$i'_2 = \frac{100}{94}\sqrt{2}\ 7{,}5 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{180}\ 129\right)\text{A};$$

$$i' = \frac{100}{94} \cdot \sqrt{2}\ 12{,}5 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{180}\ 76\right)\text{A}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Puterea activă corespunzătoare tensiunii u' este

$$P' = U'I' \cos \varphi = 100 \cdot \frac{1000}{94} \cos 76^\circ \approx 257 \text{ W}.$$

5.4.1. $Z = 4\ \Omega$, $\cos \varphi = \cos 60^\circ = 0{,}5$, $R = Z \cos \varphi = 2\ \Omega$, $X = Z \sin \varphi = 2\sqrt{3}\ \Omega$.

5.4.2. $U_a = U \cos \varphi = 6$ V, $U_r = U \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$ V; $I_a = I \cos \varphi = 1{,}5$ A, $I_r = I \sin \varphi = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ A.

5.4.3. $P = UI \cos \varphi = UI_a = 18$ W, $Q = UI \sin \varphi = UI_r = 18\sqrt{3}$ var.

5.4.4. $\cos \varphi_1 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = 10\ \Omega$, $R_1 = Z_1 \cos \varphi_1 = 5\sqrt{3}\ \Omega$, $X_1 = Z_1 \sin \varphi_1 = 5\ \Omega$, $P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = RI^2 = 4190$ W, $Q_1 = UI \sin \varphi_1 = 2420$ var, $S_1 = 4840$ VA, $\cos \varphi_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $Z_2 = 10\ \Omega$, $R_2 = Z_2 \cos \varphi_2 = 5\sqrt{3}\ \Omega$, $X_2 = Z_2 \sin \varphi_2 = -5\ \Omega$, $P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = 4190$ W, $Q_2 = U_2 I_2 \sin \varphi_2 = -2420$ var, $S = 4840$ VA; $\cos \varphi_3 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $Z_3 = 2\ \Omega$, $R_3 = Z_3 \cos \varphi_3 = \sqrt{2}\ \Omega$, $X_3 = Z_3 \sin \varphi_3 = \sqrt{2}\ \Omega$, $P_3 = U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 25\sqrt{2}$ W, $Q_3 = U_3 I_3 \sin \varphi_3 = 25\sqrt{2}$ var, $S_3 = 50$ VA; $\cos \varphi_4 = \cos 0 = 1$, $Z_4 = 1\ \Omega$, $R_4 = Z_4 = 1\ \Omega$, $X_4 = 0$; $P_4 = 1$ W, $Q_4 = 0$, $S_4 = P_4 = 1$ VA; $\cos \varphi_5 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $Z_5 = 6\ \Omega$, $R_5 = 0$, $X_5 = Z_5 \sin \varphi_5 = Z_5 \sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right) = -6\ \Omega$, $P_5 = R_5 I_5^2 = 0$, $Q_5 = I_5 I_5^2 = -6$ var, $S_5 = 6$ VA.

5.4.5. $R = Z \cos \varphi = 10\ \Omega$, $X = Z \sin \varphi = 10\sqrt{3}\ \Omega$, $I = \frac{U}{Z} = \frac{100}{20} = 5$ A, $i = \sqrt{2}\,5 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\,5 \sin \omega t$ A, $P = UI \cos \varphi = RI^2 = 250$ W, $Q = UI \sin \varphi = XI^2 = 250\sqrt{3}$ var, $S = 500$ VA.

Scanned with OKEN Scanner

5.4.6. $X = \frac{Q}{I^2} = -4\ \Omega$, $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 5\ \Omega$, $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = 0{,}6$, $\varphi = -53°10'$, $U = ZI = 5$ V, $u = \sqrt{2}U \cdot \sin(\omega t + \gamma) = \sqrt{2}\,5 \sin\left(2\pi \cdot 50\,t + \frac{\pi}{2}\right)$ V, $i = \sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{180}\,53{,}17\right)$ A.

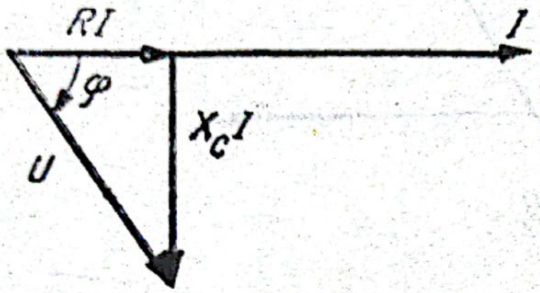


Fig. 5.4.6. R.

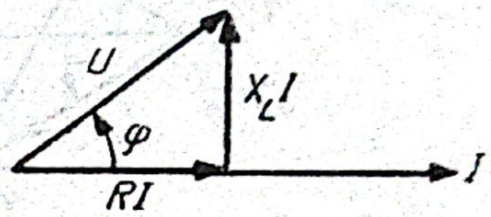


Fig. 5.4.7. R.

5.4.7. $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 110$ VA, $\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{88}{110} = 0{,}8$, $\varphi = 36°52'$.

a) $I = \frac{S}{U} = 1$ A, $i = \sqrt{2}\,I \sin(\omega t - \varphi) \approx \sqrt{2}\sin\left(2\pi \cdot 50\,t - \frac{\pi}{180}\,36{,}87\right)$ A;

b) $Z = \frac{U}{I} = 110\ \Omega$, $R = Z\cos\varphi = 88\ \Omega$, $X = Z\sin\varphi = 66\ \Omega$;

c) $i_a = \sqrt{2}\,I_a \sin 2\pi \cdot 50\,t = \sqrt{2} \cdot 0{,}8 \sin 2\pi \cdot 50\,t$, $i_r = \sqrt{2}\,I_r \sin\left(2\pi \cdot 50\,t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot 0{,}6 \sin\left(2\pi \cdot 50\,t - \frac{\pi}{2}\right)$ A.

5.4.8. a) $U = \frac{2{,}5}{\sqrt{2}}$ V, $I = 2\sqrt{2}$ A, $u = 2{,}5 \sin\left(\frac{2\pi}{0{,}02}\,t - \frac{\pi}{6}\right)$ V, $i = 4 \sin\left(2\pi \cdot 50\,t + \frac{\pi}{6}\right)$ A;

b) $Z = \frac{U}{I} = \frac{2{,}5}{4} = 0{,}625\ \Omega$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, $R = Z\cos\varphi = 0{,}313\ \Omega$, $X = Z\sin\varphi = -0{,}543\ \Omega$;

c) $P = UI\cos\varphi = RI^2 = 2{,}50$ W, $Q = UI\sin\varphi = XI^2 \approx 4{,}34$ var, $S = UI = 5$ VA.

5.4.9. $U_a = U\cos\varphi = \dfrac{2{,}5}{2\sqrt{2}} = 0{,}886$ A, $U_2 = U\sin\varphi \approx 1{,}54$ V, $I_a = 1{,}41$ A, $I_r = 2{,}45$ A.

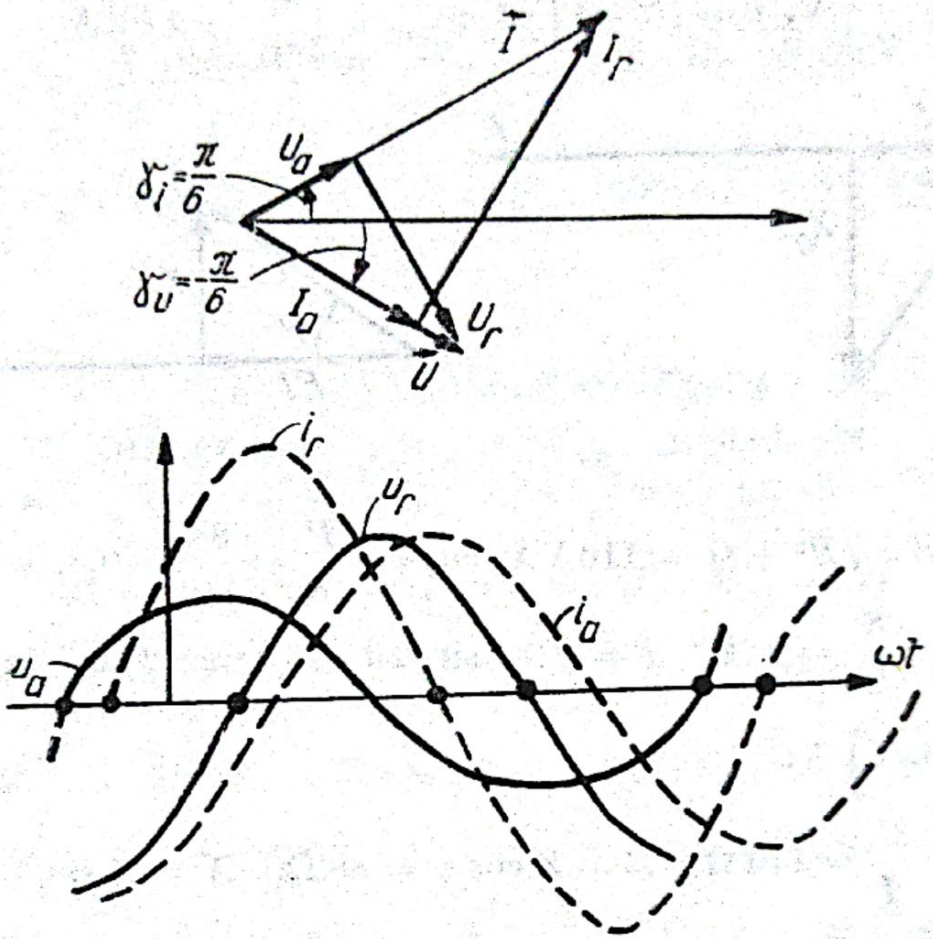


Fig. 5.4.9. R.

5.4.10. a) $U_a = U\cos\varphi = 100\cos\dfrac{\pi}{3} = 50$ V, $U_r = U\sin\varphi = 86{,}5$ V, $R = \dfrac{U_a}{I} = 5\ \Omega$, $X = 8{,}65\ \Omega$, $Z = 10\ \Omega$;

b) $P = U_a I = 500$ W, $Q = U_r I = 865$ var;

c) $\cos\varphi = 0{,}5$.

5.4.11. $I_a = I\cos\varphi = 1{,}5$ A, $I_r = I\sin\varphi = 2{,}6$ A, $G = \dfrac{I_a}{U} = 0{,}125$ S, $B = \dfrac{I_r}{U} = 0{,}217$ S, $Y = \dfrac{I}{U} = 0{,}25$ S.

Scanned with OKEN Scanner

5.4.12. 1) $I_a = I\cos\varphi = 22\cos\frac{\pi}{6} = 19$ A, $I_r = 11$ A, $i_a = \sqrt{2}\,I_a\sin(\omega t + \gamma_u) = \sqrt{2}\,19\sin\omega t$ A, $i_r = \sqrt{2}\,11\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ A, $G = \frac{I_a}{U} = 0{,}0865$ S, $B = \frac{I_r}{U} = \frac{11}{220} = \frac{1}{20} = 0{,}05$ S, $Y = \frac{I}{U} = 0{,}1$ S;

2) $I_a = 19$ A, $I_r = I\sin\varphi = 22\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -11$ A, $i_a = \sqrt{2}\,19\sin\omega t$ A, $i_r = -\sqrt{2}\,11\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,11\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ A, $G = 0{,}0865$ S, $B = \frac{I_r}{U} = -0{,}05$ S, $Y = 0{,}1$ S;

3) $I_a = I\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{2}}$ A, $I_r = I\sin\varphi = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ A, $G = \frac{I_a}{U} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ S, $B = \frac{I_r}{U} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ S, $Y = \frac{I}{U} = 0{,}5$ S;

4) $I_a = I\cos\varphi = i\cos 0° = 1$ A, $I_r = 0$, $G = \frac{I_a}{U} = 1$ S, $B = 0$, $Y = 1$ S.

5.4.13. $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, $U = \frac{Q}{I\sin\varphi} = \frac{30}{10\cdot 0{,}5} = 6$ V, $u = \sqrt{2}\,6\sin\left(2\pi\cdot 50\,t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\,6\sin\left(2\pi\cdot 50\,t + \frac{\pi}{2}\right)$ V, $Y = \frac{1}{U} = \frac{10}{6} = 1{,}67$ S, $G = Y\cos\varphi = 1{,}45$ S, $B = Y\sin\varphi = 0{,}835$ S.

5.4.14. $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 100$ VA, $P = GU^2 \Rightarrow G = \frac{P}{U^2} = \frac{88}{110^2} = 7{,}28$ mS, $B = \frac{Q}{U^2} = \frac{66}{110^2} = 5{,}45$ mS, $Y = \frac{S}{U^2} \approx 9{,}1$ mS.

5.4.15. 1) $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 10\ \Omega$, $G = \frac{R}{Z^2} = 0{,}06$ S, $B = \frac{X}{Z^2} = 0{,}08$ S, $Y = \frac{1}{Z} = 0{,}1$ S, $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = 0{,}6$;

Scanned with OKEN Scanner

2) $Y = \sqrt{G^2 + B^2} = 5$ S, $R = \frac{G}{Y^2} = \frac{3}{25} = 0{,}12$ S, $X = \frac{B}{Y^2} = \frac{-4}{25} = -0{,}16$ S, $Z = \frac{1}{Y} = 0{,}2\ \Omega$, $\sin\varphi = \frac{B}{Y} = -\frac{4}{5}$ S;

3) $G = \frac{R}{Z^2} \Rightarrow Z = \sqrt{\frac{R}{G}} = 2\ \Omega$, $Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{2}$ S, $X = \pm\sqrt{Z^2 - R^2} = \pm\sqrt{3}\ \Omega$, $B = \frac{X}{Z^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$ S, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R} = \pm\sqrt{3}$;

4) $R = \sqrt{Z^2 - X^2} = 4\ \Omega$, $G = \frac{R}{Z^2} = \frac{4}{25} = 0{,}16$ S, $B = \frac{X}{Z^2} = -0{,}12$ S, $Y = \frac{1}{Z} = 0{,}2$ S;

5) $X = \frac{B}{I^2} = BZ^2 = 3\ \Omega$, $R = \sqrt{Z^2 - X^2} = 4\ \Omega$, $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

5.5.1. a) $I = \frac{U}{R} = 55$ A;

b) $i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \gamma_u - \varphi) = \sqrt{2}\, 55 \sin(2\pi \cdot 50\, t + 1)$ A;

c) $p = ui = \sqrt{2}\, U \sin(\omega t + \gamma_u)$. $\sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \gamma_u - \varphi) = UI\,[\cos\varphi - \cos(2\omega t + 2\gamma_u - \varphi)] \Rightarrow p_{max} = UI(1 + \cos\varphi) = 2UI = U_m I_m = 2 \cdot 220 \cdot 55 = 24200$ W $= 24{,}2$ kW;

d) $P = UI\cos\varphi = RI^2 = 12100$ W $= 12{,}1$ kW.

5.5.2. $G = \frac{1}{R} = 0{,}25$ S, $B = 0$, $Y = G = 0{,}25$ S.

5.5.3. $Z = \frac{U}{I} = 1000\ \Omega$, $X_C = Z = 1000\ \Omega$, $X = -X_C = -1000\ \Omega$, $C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2000\pi \cdot 1000} = \frac{1}{2\pi} 10^{-6}$ F $= \frac{1}{2\pi}\ \mu$F, $P = 0$, $Q = XI^2 = -1000 \cdot 10^{-2} = -10$ var, $S = UI = 10$ VA, $X_C' = \frac{1}{2} X_C = 500\ \Omega$, $Z' = \frac{Z}{2}$, $P = 0$, $Q' = \frac{1}{2} Q$, $S' = \frac{1}{2} S$.

Scanned with OKEN Scanner

5.5.4. $Q = UI \sin \varphi = UI(-1) \Rightarrow I = \dfrac{Q}{-U} = \dfrac{-4}{-100} = 0{,}04$ A, $I_m = \sqrt{2}\, I = 0{,}0564$ A, $i = I_m \sin\left(\omega t + \gamma_u + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\, 56{,}4 \sin\left(\omega t + \gamma_u + \dfrac{\gamma}{2}\right)$ mA, $X_C = Z = \dfrac{U}{I} = \dfrac{100}{0{,}04} = 2500\ \Omega$, $B = \dfrac{1}{X} = \dfrac{1}{-X_C} = -\dfrac{1}{2500} = -0{,}4$ mS.

5.5.5. $X_L = \omega L = 100\ \Omega$, $I = \dfrac{U}{X_L} = \dfrac{12}{100} = 0{,}12$ A, $i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \gamma_u - \varphi) = \sqrt{2} \cdot 0{,}12 \cdot \sin\left(1000\, t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ A, $P = 0$, $Q = X_L I^2 = 1{,}44$ var.

5.5.6. $X_L' = \omega' L = 3\omega L = 3X_L$, $U' = 6U$, $Q' = \dfrac{U'^2}{X_L'} = \dfrac{36U^2}{3X_L} = 12\, Q \approx 17{,}3$ var.

5.5.7. $P_E = EI \cos(\gamma_e - \gamma_i) = 220 \cdot 5 \cos\dfrac{\pi}{3} = 550$ W, $Q_E = EI \sin(\gamma_e - \gamma_i) = 220 \cdot 5 \sin\dfrac{\pi}{3} = 952$ var; $p = ei = EI[\cos(\gamma_e - \gamma_i) - \cos(2\omega t + \gamma_e + \gamma_i)] \Rightarrow p_{max} = EI[\cos(\gamma_e - \gamma_i) + 1] = 1100\left(\dfrac{1}{2} + 1\right) = 1650$ W.

5.5.8. $P = |Q| \Leftrightarrow \dfrac{U^2}{R} = \dfrac{U^2}{X_C} \Rightarrow R = X_C \Rightarrow R = \dfrac{1}{\omega C} \Leftrightarrow RC = \dfrac{1}{\omega}$.

5.5.9. a) $X_L = \omega L = 100\, \pi \Omega$;

b) $u = \sqrt{2}\, IX_L \sin\left(\omega t + \gamma_i + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1000\, \pi \sin\left(2\pi \cdot 50\, t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ A;

c) $Q = XI^2 = \dfrac{\pi}{2} \cdot 10^4$ var;

Scanned with OKEN Scanner

d) $w = \dfrac{Li^2}{2} \Rightarrow w_{max} = \dfrac{Li_{max}^2}{2} = 50$ J.

5.5.10. a) $U = ZI = 10 \cdot 100 \cdot 10^{-3} = 1$ V, $u = \sqrt{2}\, U \sin\left(\omega t + \right.$

$\left. + \gamma_i - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \sin\left(1000\, t + - \dfrac{\pi}{2}\right)$ V;

b) $X = -X_C = -10\ \Omega$;

c) $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{1000 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 10\ \Omega$, $Z = X_C = 10\ \Omega$;

d) $Q = XI^2 = -X_C I^2 = -10 \cdot 10^{-2} = -0{,}1$ var;

e) $w = \dfrac{Cu^2}{2} \Rightarrow w_{max} = \dfrac{Cu_{max}^2}{2} = \dfrac{10^{-4}(\sqrt{2})^2}{2} = 10^{-4}$ J.

5.6.1. $U_R = RI = 8$ V, $U_L = X_L I = 6$ V;

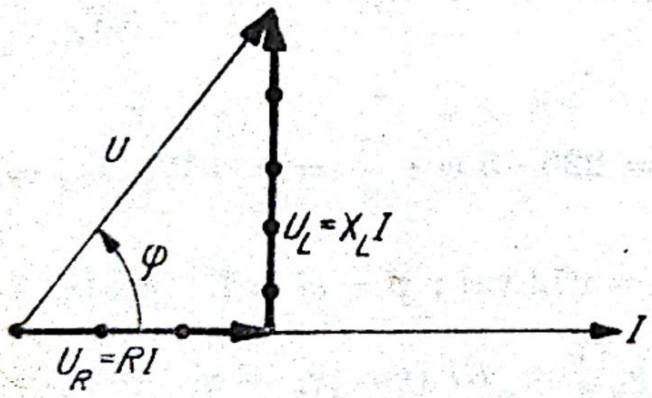


Fig. 5.6.1 R.

c) $U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = 10$ V;

d) $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z} = \dfrac{4}{5}$;

e) $Z = \dfrac{U}{I} = 5\ \Omega$,

f) $P = RI^2 = 16$ W;

g) $Q = XI^2 = 12$ var;

h) $S = ZI^2 = 20$ VA.

5.6.2. $X_L = \omega L = 30\ \Omega$, $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = 30{,}3\ \Omega$, $I = \dfrac{U}{Z} \approx$

$\approx 0{,}33$ A, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{X_L}{R} = 7{,}5$, $\varphi = 82°25'$, $i = \sqrt{2} I \sin(\omega + \gamma_u - \varphi) \approx$

$\approx \sqrt{2} \cdot 0{,}33 \sin(2\pi \cdot 500\, t - 82°25')$ A; $U_R = RI = 1{,}32$ V, $U_L = 9{,}9$ V,

$P = U_R I \approx 0{,}435$ W, $Q = 3{,}27$ var.

5.6.3. $U_m = \sqrt{2}\, U = U_{inc}$, $f = \dfrac{1}{2\pi L} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{U_m}{\sqrt{2}\, I}\right)^2 - R^2} \approx 8800$ Hz.

Scanned with OKEN Scanner

5.6.4. b) $L = \sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{1}{I_1}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{I_2}\right)^2}{f_1^2 - f_2^2}} \cdot \dfrac{U}{2\pi} \approx 13{,}6 \text{ mH},$

$$R = \sqrt{\left(\frac{U}{I_1}\right)^2 - (\omega_1 L)^2} = 5{,}1\ \Omega.$$

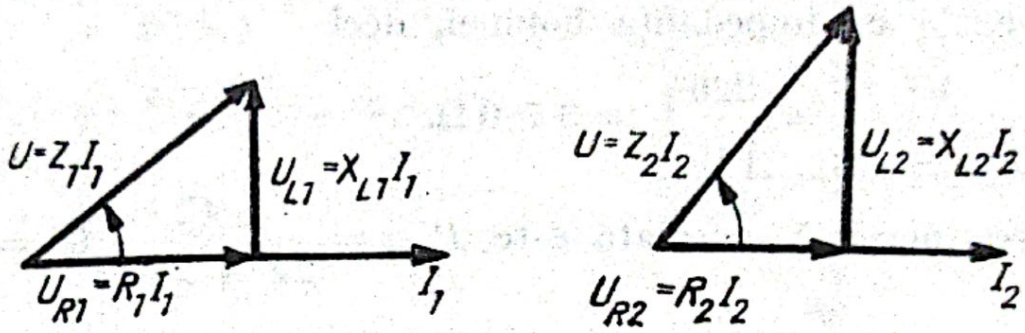


Fig. 5.6.4. R.

c) $P_1 = RI_1^2 = 735$ W; $P_2 = RI_2^2 = 326$ W.

d) $E_{m1} = X_{L1} I_{m1} = 72{,}4$ V, $E_{m2} = X_{L2} I_{m2} = 96{,}5$ V.

5.6.5. a) $R = 12\ \Omega$; $L = \dfrac{4}{25\pi}$ H;

b) $X_{L1} = \omega_1 L = 16\ \Omega$, $X_{L2} = 32\ \Omega$; $Z_1 = 20\ \Omega$, $Z_2 = 34\ \Omega$;

c) $G_1 = \dfrac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} = 0{,}03$ S, $B_1 = \dfrac{X_1}{R_1^2 + X_{L1}^2} = 0{,}04$ S, $G_2 = 0{,}0103$ S, $B_2 = 0{,}0276$ S.

5.6.6. a) $P = UI \cos \varphi$, $W = P \cdot t = 12 \cdot 300 = 3\,600$ J;

b) $W_{max} = \dfrac{LI_m^2}{2} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 500} 4^2 = \dfrac{3 \cdot \sqrt{3}}{1000} 8 = 41{,}6$ mJ;

c) $R = Z \cos \varphi = \dfrac{3}{2}\ \Omega$;

d) $L = \dfrac{Z}{\omega} \sin \varphi = 3\sqrt{3}$ mH;

e) $i = \dfrac{12}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4}\right)^2}} \sin\left(250\,t - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= \dfrac{16}{\sqrt{7}} \sin\left(250\,t - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ A.

5.6.7. Calculînd valoarea extremă rezultă o rezistenţă a rezistorului r egală cu impedanţa bobinei, deci

$$r = \frac{U^2}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{220^2}{\sqrt{164}} = 3\,780\ \Omega.$$

Puterea maximă calculată este $P_{max} = \dfrac{U}{2Z^2 + 2ZR} U^2 =$

$$= \frac{U^2}{2\,(r + R)} = \frac{220^2}{2\,(3\,780 + 2\,930)} = 3{,}59\ \text{W}.$$

5.6.8. a) $X_c = \dfrac{1}{\omega_0} = 20\ \Omega$, $X = -X_0 = -20\ \Omega$, $Z =$

$= \sqrt{R^2 + X^2} = 25\ \Omega$;

b) $G = \dfrac{R}{Z^2} = 0{,}024$ S, $B = \dfrac{X}{Z^2} = -0{,}032$ S, $Y = 0{,}04$ S;

c) $P = GU^2 = 240$ W, $Q = -320$ var, $S = 400$ VA;

d) $i = \sqrt{2}\,4 \sin\left(500\,t + \dfrac{\pi}{180}\,53°10'\right)$ A.

5.6.9. a) $U_R = 60$ V, $U_C = \sqrt{3}\,60$ V;

b) $\cos\varphi = \dfrac{U_R}{U} = \dfrac{1}{2}$;

c) $I = \dfrac{P}{U_R} = 1$ A, $R = \dfrac{U_R}{I} = 60\ \Omega$, $X_C = \dfrac{U_C}{I} = \sqrt{3}\,60\ \Omega$, $Z =$

$= 120\ \Omega$;

d) $C = \dfrac{1}{\omega X_C} = 9{,}64\ \mu\text{F}$.

Scanned with OKEN Scanner

5.6.10. $X = -R$, $X_C = R$, $Q_m = \dfrac{-U^2}{2R}$.

5.6.11. a) $R = \dfrac{U}{I_1 I_2}\sqrt{\dfrac{I_2^2 f_1^2 - I_1^2 f_2^2}{f_1^2 - f_1^2}}$, $G = \dfrac{I_1 I_2}{2\pi f_1 f_2 U}\sqrt{\dfrac{f_2^2 - f_1^2}{I_2^2 - I_1^2}}$.

5.6.12. b) $U_R = U\cos\varphi = 80$ V, $U_C - U_L = U \times \sin\varphi = 60$ V, $U_L = 30$ V, $U_C = 90$ V;

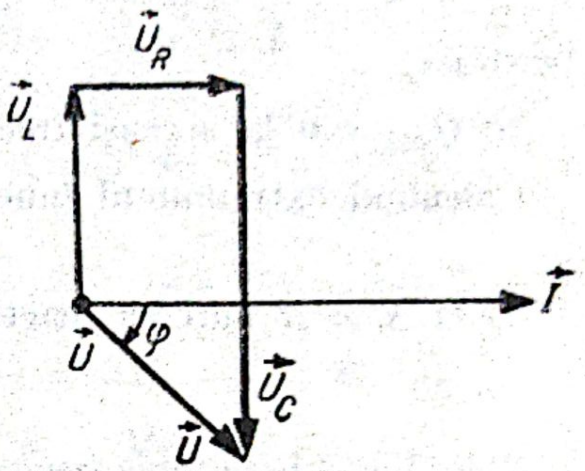


Fig. 5.6.12. R.

a) $U_B = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = 85{,}4$ V;

d) $I = \dfrac{P}{U_R} = 2$A;

e) $R = \dfrac{U_R}{I} = 40\ \Omega$, $X_L = \dfrac{U_L}{I} = 15\ \Omega$, $X_C = 45\ \Omega$,

$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 50\ \Omega$.

5.6.13. Din $X_L^2 = (X_L - X_C)^2$ rezultă $X_L = \dfrac{1}{2}X_C$;

a) ca urmare $X_L = \dfrac{1}{2\omega C} = 24\ \Omega$; $L = 76{,}2$ mH. Din $I = \dfrac{U}{Z}$ rezultă $Z = \dfrac{U}{I} = 30\ \Omega$ și deci $R = \sqrt{Z^2 - X_L^2} = 18\ \Omega$;

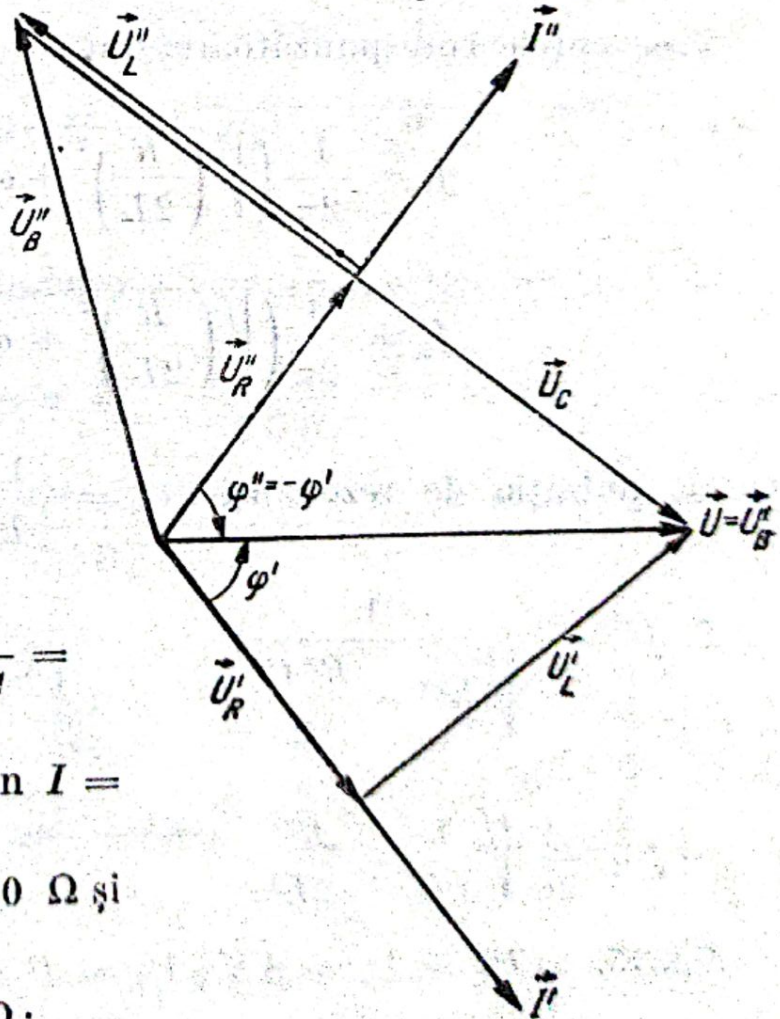


Fig. 5.6.13. R.

Scanned with OKEN Scanner

b) $P = RI^2 = 72$ W, $Q_1 = -Q_2 = X_L I^2 = 96$ var;

c) $U_B = U = 60$ V;

5.6.14. a) $P_m = \dfrac{U^2}{R}$ pentru $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, adică la rezonanță de tensiune;

b) $Q_{min} = 0$ la aceeași frecvență de rezonanță.

Calculînd extremumul funcției $Q = Q(X)$ rezultă că:

1) la $X = R$ puterea reactivă are valoare maximă $Q_{max} = \dfrac{U^2}{2R}$,

2) la $X = -R$, puterea reactivă are valoare minimă $Q_{min} = -\dfrac{U^2}{2R}$.

Frecvențele corespunzătoare sînt

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} + \frac{R}{2L}\right),$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} - \frac{R}{2L}\right),$$

cu ω_0 pulsația de rezonanță: $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

d) $f = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{LC - \dfrac{R^2C^2}{2}}}$;

e) $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{2L^2}}$.

5.6.15. a) $U_L = U_C = 8$ V; $U_R = U = 6$ V; $U_B = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}\,10$ V;

Scanned with OKEN Scanner

b) $R = \frac{U^2}{P} = 3\ \Omega,\ X_C = X_L = \frac{U_C}{I} = 4\ \Omega;$

c) $\cos\ \varphi = \frac{R}{Z} = 1;$

d) $Z' = \sqrt{R^2 + \left(4X_L - \frac{X_C}{4}\right)^2} = \sqrt{234} \approx 15{,}3\ \Omega,\ I =$

$= \frac{U}{Z'} \approx 0{,}392\ \text{A},\ U'_B = \sqrt{R^2 + (4X_L)^2}\, I' = \sqrt{265} \cdot 0{,}392 =$

$= 6{,}35\ \text{V};\ \cos\ \varphi' = \frac{R}{Z'} = \frac{3}{15{,}3} = 0{,}196.$

5.6.16. a) $R_1 = Z_1 \cos \varphi_1 = 20 \cdot 0{,}65 = 13\ \Omega,\quad X_1 = Z_1 \sin \varphi_1 =$

$= 20 \cdot 0{,}76 = 15{,}2\ \Omega,\ R_2 = \frac{P_2}{I^2} = 20{,}2\ \Omega,\ X_2 = \frac{Q_2}{I^2} = 15{,}1\ \Omega;$

b) $Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} \approx 45\ \Omega,\ U = ZI \approx 126\ \text{V},$

$\cos \varphi = \frac{R_1 + R_2}{Z} = 0{,}74;$ d) $Z' = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (2X_1 + 2X_2)^2} \approx$

$\approx 69\ \Omega.$

5.6.17. Se construiește diagrama vectorială a tensiunilor pentru cazul general (fig. a).

Din diagramă rezultă $\cos \varphi = \frac{U^2 + U_1^2 - U_2^2}{2UU_1} = 0{,}6;$

$$\cos \psi = \frac{-U^2 + U_1^2 + U_2^2}{2U_1 U_2} = 0.$$

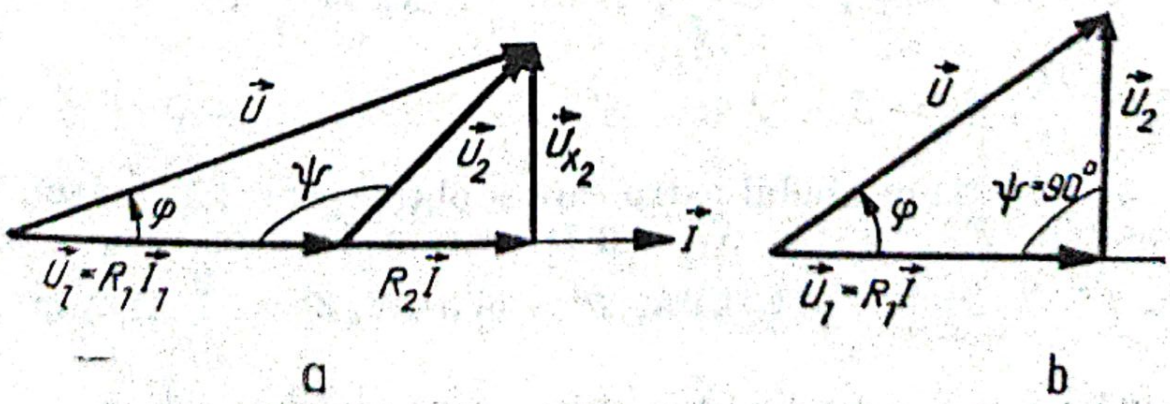


Fig. 5.6.17. R.

Scanned with OKEN Scanner

Unghiul calculat ψ fiind de 90° diagrama capătă forma din figura b şi deci $R_2 = 0$, $U_{X2} = 80$ V,

$$I = \frac{U_1}{R_1} = 0{,}6 \text{ A}, \quad X_2 = \frac{U_{X2}}{I} \approx 133\ \Omega.$$

5.6.18. a) $u' = \sqrt{2}\,100 \sin\left(2\pi \cdot 50\, t - \frac{2\pi}{45}\right)$ V, $u'' = 40 \sin\left(2\pi \times \right.$

$\left. \times 50\, t + \frac{2\pi}{2}\right)$ V, $u_5 = \sqrt{2}\ 20 \sin\left(2\pi \cdot 50\, t + \frac{\pi}{4}\right)$ V, $u = \sqrt{2}\ 117 \cdot$

$\cdot \sin\left(2\pi \cdot 50\, t + \frac{7\pi}{90}\right)$ V;

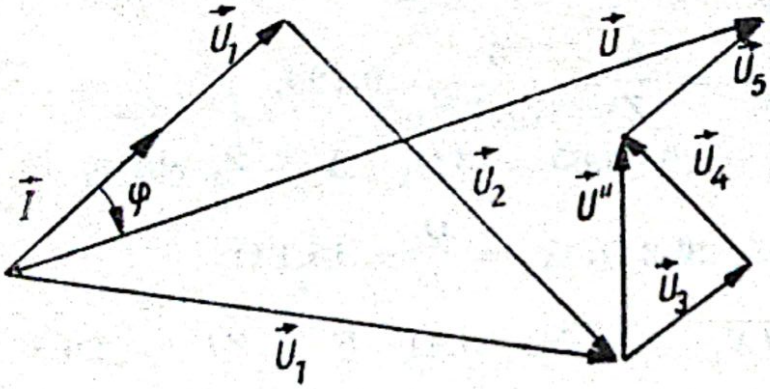


Fig. 5.6.18. R.

b) $R = 10\ \Omega$, $X = -6\ \Omega$, $Z = 11{,}7\ \Omega$;

d) $P = 1\,000$ W, $Q = -600$ var, $S = 1\,170$ VA;

e) $\cos\varphi = \frac{R}{Z} \approx 0{,}86$.

5.6.19. 1) $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, $I = \frac{U}{Z}$, $P = RI^2$, $Q = (X_L - X_c)I^2$, $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$;

2) $I = \sqrt{\frac{P}{R}}$, $U_C = U_L - \frac{Q}{I}$, $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$;

3) $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, $U = \frac{S}{I}$, $R = \frac{P}{I^2}$, $X_C = \frac{U_C}{I}$,

$X = \frac{Q}{I^2}$, $X_L = X + X_C$;

5) Ecuaţia de gradul patru care se obţine pentru X_C are soluţiile acceptabile $X_C' = 1\ \Omega$, $X_C'' = 2\ \Omega$, cărora le corespund valorile $I' = 50\sqrt{3}$ A, $S' = 5\sqrt{3}$ kVA, $P' = 5\sqrt{3}$ kW, $Z' = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \Omega$, respectiv

$I'' = 25\sqrt{3}$ A, $S'' = 2{,}5\sqrt{3}$ kVA, $P'' = 2170$ W, $Z'' = \frac{4}{\sqrt{3}}\ \Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

5.6.20. Curentul este maxim la rezonanța de tensiune, deci $R = \frac{U}{I_1} = 12$ A. La frecvențele f_2 și f_3, curentul având aceeași valoare efectivă rezultă că și reactanțele au aceeași valoare absolută. La creșterea frecvenței reactanța inductivă crește și cea capacitivă scade, deci

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2} = -X,$$

$$\omega_3 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2} = X.$$

Rezolvînd acest sistem se obține

$$L = \frac{X}{\omega_3 - \omega_2} = \frac{\sqrt{3}}{20\pi} H,$$

$$C = \left(\frac{\omega_2 \omega_3}{\omega_3 - \omega_2} X\right)^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{3\pi} \text{mF}.$$

a) $Z_1 = 5\ \Omega$, $Z_2 = 10\ \Omega$, $Z_3 = 10\ \Omega$,

$\cos \varphi_1 = 1$, $\cos \varphi_2 = \cos \varphi_3 = \frac{1}{2}$ (capacitiv, respectiv inductiv).

c) $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{2}\pi \cdot 10^2}{2\pi} = 70{,}5$ Hz,

$U_1 = \sqrt{R^2 + (2\pi f_1 L)^2}\, I_1 = 528$ V, $U_2 = \sqrt{R^2 + (2\pi f_2 L)^2}\, I_2 =$

$= 200$ V, $U_3 = \sqrt{R^2 + (2\pi f_3 L)^2}\, I_2 = 358$ V.

5.7.1. Puterea activă a circuitului este egală cu puterea activă a rezistorului (deoarece componenta activă a curentului I este chiar curentul rezistorului R). Ca urmare

$$R = \frac{U^2}{P} = 10^3\ \Omega$$

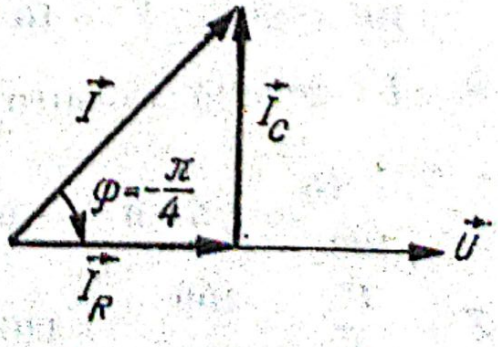


Fig. 5.7.1. R.

Scanned with OKEN Scanner

și

$$I_R = \frac{U}{R} = 0{,}1 \text{ A}.$$

Triunghiul curenților fiind un triunghi dreptunghic se obține

$$I_C = \sqrt{I^2 - I_R^2} = 0{,}1\sqrt{2-1} = 0{,}1 \text{ A}.$$

Din $U = X_C I_C$ se deduce

$$X_C = \frac{U}{I_C} = 10^3\ \Omega.$$

Folosind definiția reactanței capacitive, rezultă

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^3} = 1{,}59 \cdot 10^{-6}\ \text{F} = 1{,}59\ \mu\text{F}.$$

Factorul de putere se poate calcula din expresia puterii active

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{10}{100\sqrt{2 \cdot 0{,}1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

Ca urmare, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

5.7.2. Puterea activă nu se modifică la circuitul considerat dacă se modifică frecvența, deoarece nu se modifică curentul din rezistor: $P = \frac{U^2}{R} = 10$ W. Puterea reactivă a circuitului fiind puterea reactivă primită de condensator, rezultă $Q = \frac{U^2}{-X_C} = \frac{10^4}{-\frac{10^3}{2}} =$ $= -20$ var. Puterea aparentă a circuitului este $S = \sqrt{P^2 + Q^2} =$ $= \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{5} \cdot 10$ VA. Folosind expresia puterii aparente $S = UI$ rezultă valoarea efectivă a curentului cerut $I = \frac{S}{U} =$ $= \frac{\sqrt{5} \cdot 10}{100} = \sqrt{5} \cdot 10^{-1} \approx 0{,}224$ A. Impedanța corespunzătoare este

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{100}{0{,}224} = 446\ \Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

5.7.3. a) $I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$

b) $Z = \frac{I_R}{I} R$;

c) $\cos \varphi = \frac{I_R}{I}$;

d) $Q = UI \sin \varphi$, cu $\sin \varphi = \frac{I_L}{U}$.

5.7.4. a) $L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{U}{\omega I_{L0}} = \frac{100}{2\pi\ 500 \cdot 1} = 0{,}0318$ H,

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{I_{C0}}{\omega U} = \frac{I_{L0}}{\omega U} = \frac{1}{2\pi\ 500 \cdot 100} = 3{,}18\ \mu\text{F};$$

b) $I = I_C - I_L = 2I_{C0} - \frac{1}{2} I_{L0} = 1{,}5$ A.

$$Q = -UI = -150 \text{ var}.$$

5.7.5. Fără condensator curentul dat de linie este curentul i_R luat de receptor. La conectarea condensatorului curentul dat de linie i este suma curenţilor sinusoidali luaţi de receptor i_R şi de condensator i_C. Această sumă se poate determina vectorial, aşa cum se indică în figură. Pentru a rezulta un anumit defazaj φ_e corespunzător factorului de putere dat $\cos \varphi_e$ este necesar deci un curent capacitiv de valoare efectivă

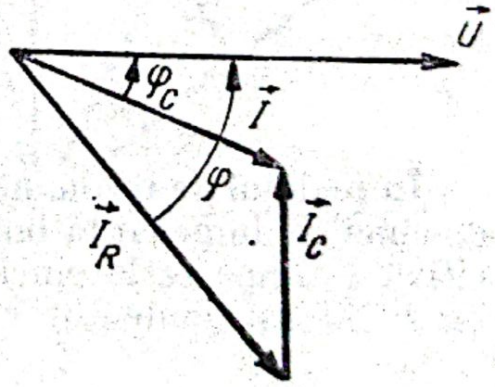


Fig. 5.7.5 R.

$$I_C = I_R \sin\varphi - (I_R \cos \varphi) \operatorname{tg} \varphi_e. \quad (1)$$

Folosind expresia puterii active $P = UI \cos \varphi_e = UI_R \cos \varphi$; rezultă

$$I_C = \frac{P}{\omega U} (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_e). \quad (2)$$

Din relaţia

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \omega C U \quad (3)$$

rezultă expresia căutată a capacității

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}\varphi_e). \qquad (4)$$

Pierderile de putere pe linie înainte și după conectarea condensatorului sînt în raportul

$$\frac{\Delta P'}{\Delta P} = \frac{r_l I_R^2}{r_l I^2} = \left(\frac{\cos\varphi_e}{\cos\varphi}\right)^2, \qquad (5)$$

unde r_l este rezistența totală a liniei.

Pentru valorile numerice date se obține

$$C = \frac{10^4}{314 \cdot 220^2}(0{,}48 - 0{,}34) = 0{,}92 \cdot 10^{-4} = 92\ \mu\mathrm{F}.$$

5.7.6. Curentul total e minim cînd suma curenților din condensator și bobina ideală este nulă, adică la rezonanța de curent. În acest caz, curentul total este egal cu curentul din rezistor $I_R = I_{min} = 5$ A. Rezistența rezistorului este deci

$$R = \frac{P}{I_R^2} = 4\ \Omega.$$

În regimul de rezonanță dat $I'_C = I'_L = 5$ A. La mărirea frecvenței de cinci ori impedanța bobinei crește de cinci ori, iar reactanța capacitivă se împarte la cinci. Ca urmare, la frecvența $f = 5f'$, curenții din bobină și condensator devin

$$I_L = \frac{1}{5} I_L = 1\ \mathrm{A}, \qquad I_C = 5\, I'_C = 25\ \mathrm{A}.$$

Curentul total are valoarea efectivă

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{5^2 + 24^2} = \sqrt{25 + 576} \approx 24{,}5\ \mathrm{A}.$$

Puterea activă rămîne nemodificată $P = P' = 100$ W.

Scanned with OKEN Scanner

5.7.7. $R_p = \dfrac{R_s^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C_s}\right)^2}{R_s}$,

$$C_p = \frac{1}{\omega} \frac{\dfrac{1}{\omega C_c}}{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C_s}\right)^2}.$$

5.7.8. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{r}{r^2 + x^2}; \dfrac{1}{X_C} = \dfrac{x}{r^2 + x^2}; \; P_m = \dfrac{E^2}{4r}$.

5.7.9. Problema se rezolvă grafic construind la scară diagrama curenților și tensiunilor. Din diagramă rezultă:

a) $I = 5\text{A}$, $i = 5\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \right.$

$\left. + \dfrac{\pi}{180} 37^\circ\right)$ A;

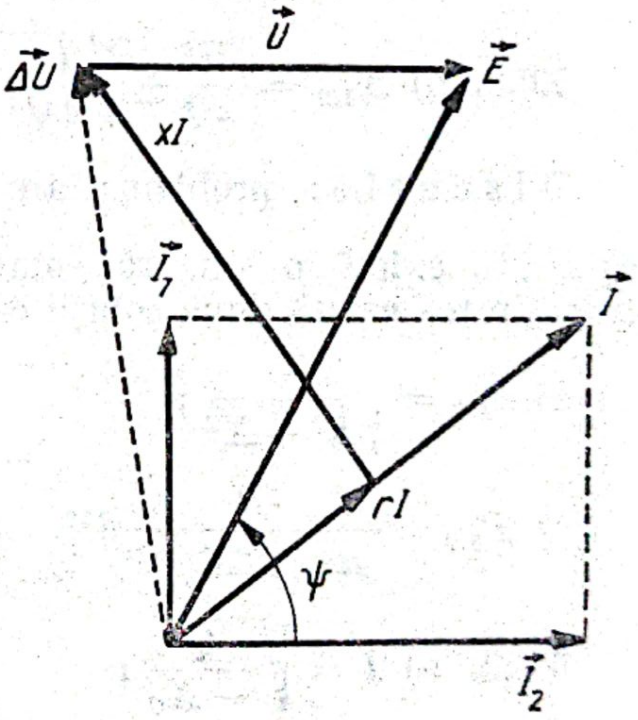


Fig. 5.7.9. R.

b) $U = 4\text{ V}$, $u = 4\sqrt{2}\sin\omega t$;

c) $I_a = 4\text{ A}$, $P = UI_a = 16\text{ W}$, $P_p = rI^2 = 25\text{ W}$,

$$\eta_1 = \frac{P}{P + P_p} = \frac{16}{16 + 25} = 0{,}39 = 39{,}1\%.$$

Observație: Regimul considerat este apropiat de regimul de scurtcircuit în sensul că prin sursă trece un curent mare, apropiat de curentul de scurtcircuit, care produce o cădere de tensiune internă mare.

5.7.10. $R = X_C = \dfrac{1}{\omega C} = 10\,\Omega$;

$$I_R = I_C = \frac{I}{\sqrt{2}} = 5\text{ A}.$$

$$P_{max} = RI_R^2 = 250\text{ W}.$$

Scanned with OKEN Scanner

(Rezultatul se obţine relativ uşor folosind diagrama vectorială a curenţilor şi determinînd grafic maximul componentei active a tensiunii $U_a = X_C I_C \cos \varphi$).

5.3.1. c) $I = \frac{S}{U} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{U}$;

b) $R = \frac{P}{I^2} = \frac{P}{P^2 + Q^2} U^2$, $X = \frac{Q}{I^2} = \frac{Q}{P^2 + Q^2} U^2$,

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{\sqrt{P^2 + Q^2}};$$

$$P' = \frac{R}{R^2 + (2X)^2} U^2 = \frac{P^2 + Q^2}{P^2 + 4Q^2} P.$$

5.3.2. b) $X_{1,2} = \frac{U^2}{2Q} \pm \sqrt{\frac{U^4}{4Q^2} - R^2}$.

Discuţie: problema are soluţie numai dacă $R \leqslant \frac{U^2}{2Q}$. La egalitate există o singură soluţie $X = R$. Dacă este satisfăcută inegalitatea există două soluţii care ambele corespund fizic ($X > 0$).

a) $I_{1,2} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}}$;

c) $P_{1,2} = \frac{R}{R^2 + (X_{1,2})^2} U^2$.

5.3.3. a) $I = \sqrt{\frac{Q}{-X_C}}$;

b) $Z = \frac{U}{I} = U \sqrt{\frac{-X_C}{Q}}$;

c) $R = \sqrt{Z^2 - X_C^2} = \sqrt{-X_C \left(\frac{U^2}{Q} + X_C \right)}$.

Observaţie. $Q < 0$, problema are soluţie numai dacă $\frac{-U^2}{Q} \geqslant X_C$;

d) $U_C = X_C I = \sqrt{-X_C Q}$, $U_R = RI = \sqrt{U^2 + X_C Q}$.

Scanned with OKEN Scanner

5.8.4. a) $R = \frac{P}{I^2}$, $X = \frac{Q}{I^2}$;

b) $U_R = RI = \frac{P}{I}$, $U_C = X_C I = -\frac{Q}{I}$;

c) $U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \frac{1}{I}\sqrt{P^2 + Q^2}$;

d) $\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$.

5.8.5. a) $U_R = \sqrt{U^2 - U_C^2}$;

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{U^2 - U_C^2};$$

b) $\cos\varphi = \frac{U_R}{U} = \sqrt{1 - \left(\frac{U_C}{U}\right)^2}$;

c) $Z = \frac{U}{I} = \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{R}{\sqrt{1 - \left(\frac{U_C}{U}\right)^2}}$;

d) $P = RI^2 = \frac{U_R^2}{R} = \frac{U^2 - U_C^2}{R}$, $Q = XI^2 = -U_C I =$

$= -\frac{1}{R} U_C \sqrt{U^2 - U_C^2}$.

5.8.6. 1) $P = RI^2$, $U = ZI = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, I$, $\cos\varphi = \frac{P}{UI}$.

2) $Z = \frac{U}{I}$, $X_L = \sqrt{Z^2 - R^2}$, $Q = X_L I^2$, $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$;

3) $Z = \frac{U}{I}$, $Q = \sqrt{(UI)^2 - P^2}$, $L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{Q}{\omega I^2}$, $\cos\varphi = \frac{P}{UI}$.

4) Se rezolvă sistemul $U = \sqrt{R^2 + X_L^2}\, I$, $P = RI^2$ cu necunoscutele R, I.

Scanned with OKEN Scanner

Prin eliminare se obține ecuația care dă pe R: $PR^2 - U^2R + PX_L^2 = 0$. De unde rezultă

$$R = \frac{U^2}{2P} \pm \sqrt{\frac{U^4}{4P^2} - X_L^2}.$$

Discuție: rădăcinile reale și pozitive (produsul lor fiind X_L^2) dacă și numai dacă $X_L \leqslant \frac{U^2}{4P}$. Apoi se calculează $I = \sqrt{\frac{P}{R}}$, $Z = \frac{U}{I}$, $Q = X_L I^2$.

5.8.7. a) $R = \frac{G}{Y^2} = 20\ \Omega$, $L = \frac{X}{\omega} = \frac{B}{\omega Y^2} = \frac{0{,}04}{\pi}$ H;

b) $Z = 20\sqrt{5}\ \Omega$;

c) $I = YU = \sqrt{5}$ A.

5.8.8. a) $Z_{1,2} = Z\{-\cos(\varphi - \varphi_i) + \frac{S_{sc}}{2S} \pm$

$$\pm \sqrt{\left[-\cos(\varphi - \varphi_i) + \frac{S_{sc}}{2S}\right]^2 - 1}, \text{ unde :}$$

Z — impedanța internă a sursei, φ — defazajul receptorului $\left(\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q}{P}\right)$, φ_i — defazajul sursei $\left(\operatorname{tg}\varphi_i = \frac{x}{r}\right)$, $S_{sc} = \frac{E^2}{z}$ — puterea aparentă a sursei la scurtcircuit, $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ — puterea aparentă a receptorului;

$$R_{1,2} = Z_{1,2}\cos\varphi, \quad X_{1,2} = Z_{1,2}\sin\varphi.$$

b) $I_1 = \sqrt{\frac{P}{R_1}}$, $I_2 = \sqrt{\frac{P}{R_2}}$.

c) $U_1 = \frac{S}{I_1}$, $U_2 = \frac{S}{I_2}$.

d) $\eta_{1,2} = \frac{R_{1,2}}{R_{1,2} + r}$.

Scanned with OKEN Scanner

5.8.9. $\sqrt{Z_1 Z_2} = z$, $\sqrt{R_1 R_2} = z\cos\varphi$, $\sqrt{X_1 X_2} = x\sin\varphi$.

Observaţie. Curenţii, respectiv tensiunile, din cele două regimuri în care o sursă cu r şi x daţi dă aceeaşi putere aparentă şi aceeaşi putere reactivă circuitului conectat în bornele sale, satisfac relaţiile

$$I_2 I_2 = \frac{S}{z}, \quad U_1 U_2 = zS.$$

5.8.10. b) $R = 5\ \Omega$, $R' = \frac{45}{16}\ \Omega$;

a) Se mai cunosc, din problema precedentă relaţiile $ZZ' = z^2$ şi $\frac{Z'}{Z} = \frac{R'}{R}$. De aici rezultă $Z' = z\sqrt{\frac{R'}{R}} = 12\sqrt{\frac{45}{16\cdot 5}} = 9\ \Omega$, $Z = z\sqrt{\frac{R}{R'}} = 12\sqrt{\frac{16\cdot 5}{45}} = 16\ \Omega$;

b) $X = \pm\sqrt{Z^2 - R^2} = \pm\sqrt{16^2 - 5^2} = \pm\sqrt{11\cdot 21} = \pm 15{,}2\ \Omega$,

$X' = \pm\sqrt{Z'^2 - R'^2} = \pm\sqrt{9^2 - \left(\frac{45}{16}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{99}{16}\cdot\frac{199}{16}} \approx \pm 8{,}54\ \Omega$;

c) $Q = XI^2 = \pm 137$ var;

d) $U = ZI = 48$ V, $U' = Z'I' = 36$ V;

e) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{RR'}}{z} = \frac{5\cdot 3}{4\cdot 12} = \frac{5}{16} = 0{,}313.$

5.8.11. a) $U_g = E$; b) $z = \frac{U_g}{I_{sc}}$;

c) $P_{Jsc} = \frac{U_g^2}{4P_m} I_{sc}^2$;

d) $r = \frac{U_g^2}{4P_m}$; $x = \sqrt{z^2 - r^2}$.

5.8.12. a) $z = \sqrt{Z_1 Z_2} = 5\,\Omega$;

b) $r = \frac{E^2}{4P_m} = 3\Omega$, $x = 4\ \Omega$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $\cos\varphi = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \dfrac{3}{5}$;

d) $P = 5{,}95$ W, $Q = 4{,}22$ var;

$$\eta_1 = \frac{R}{r + R} = 0{,}625, \quad \eta_2 = \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{2}{3}R + r} = 0{,}525.$$

5.8.13. Din diagrama vectorială a tensiunilor și curenților rezultă mărimile cerute:

a) $I_1 = I_2 = \dfrac{U}{\sqrt{2}R}$, $I = \sqrt{2}\, I_1 = \dfrac{U}{R}$;

b) $i_1 = \dfrac{U}{R} \cdot \sin\left(\omega t + \gamma + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $i_2 = \dfrac{U}{R} \sin\left(\omega t + \gamma - \dfrac{\pi}{4}\right)$,

$$i = \sqrt{2}\frac{U}{R}\sin(\omega t + \gamma);$$

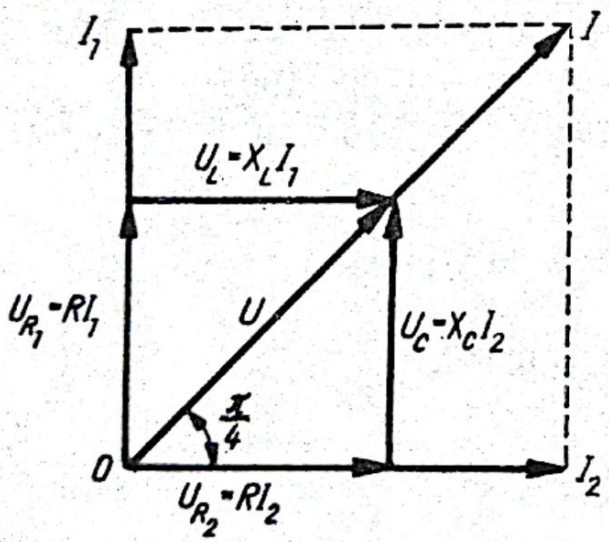


Fig. 5.8.13. R.

c) $Z_e = \dfrac{U}{I} = R$, $R_e = Z_e \cos\varphi = Z_e \cdot X_e = Z_e \sin\varphi_e = 0$;

d) $U_{R1} = RI_1 = \dfrac{U}{\sqrt{2}}$,

$U_{R2} = RI_2 = \dfrac{U}{\sqrt{2}}$,

$U_L = U_C = X_L I_1 = X_C I_2 = \dfrac{U}{\sqrt{2}}$;

e) $P = R_e I^2 = \dfrac{U^2}{R}$, $Q = X_e I^2 = 0$.

5.8.14. Problema este tipică pentru o rezolvare din aproape în aproape. Din R și P_1 se poate calcula:

$I_1 = \sqrt{\dfrac{P_1}{R_1}} = 1$ A. Din I_1 și Q_1 se deduce $X_C = \dfrac{|Q_1|}{I_1^2} = 2\ \Omega$. Din R,

Scanned with OKEN Scanner

X_C și I_1 rezultă $U_{bc} = Z_1 I_1 = \sqrt{R^2 + X_C^2}\, I_1 = 2\sqrt{2}$ V. Din U_{bc} și $U_2 = \frac{U_{m2}}{\sqrt{2}} = 2$ V se deduce (pentru rezistorul din latura 1):

$U_{R2} = \sqrt{U_{bc}^2 - U_2^2} = 2$ V. Apoi se poate calcula $I_2 = \frac{U_{R2}}{R} = 1$ A.

Mai departe rezultă:

a) $Q_2 = U_2 I_2 = 2$ var.

e) Se observă din figură că i_1 este defazat cu $\frac{\pi}{4}$ înaintea lui u_{bc} iar i_2 cu $\frac{\pi}{4}$ în urma lui u_{bc}. Defazajul dintre acești curenți fiind de $\frac{\pi}{2}$ (vezi figura), curentul I este dat de $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{2}$ A.

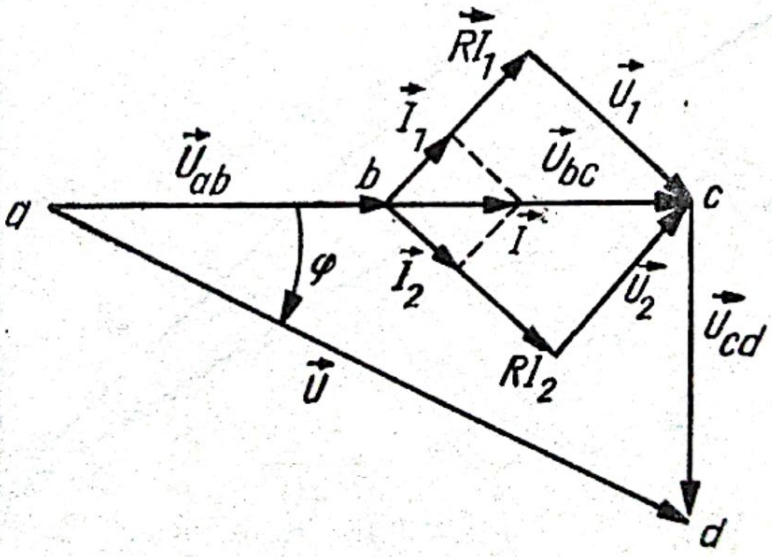


Fig. 5.8.14. R.

b) Se construiesc în diagramă vectorii care reprezintă tensiunile u_{ab} și u_{cd}. Vectorul $\vec{U}_{ab}$ are aceeași direcție și același sens cu vectorul $\vec{U}_{bc}$. Vectorul $\vec{U}_{cd}$ este perpendicular pe $\vec{U}_{bc}$. Ca urmare, din figură rezultă $U = \sqrt{(U_{ab} + U_{bc})^2 + U_{cd}^2} = \sqrt{32 + 8} = 2\sqrt{10}$ V.

c) Puterea activă primită de circuit este suma puterilor active primite de elementele circuitului și deci $P = RI^2 + RI_2^2 + RI_1^2 =$

$= 2\ RI^2 = 8$ W. Puterea reactivă se calculează analog $Q = Q_2 + Q_1 + (-X_C)\ I^2 = 2 - 2 - 4 = -4$ var, deoarece la circuitul considerat $X_L = X_C = 2\ \Omega$. Puterea aparentă la bornele a, b, ale circuitului este deci $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{80}$ VA. Această putere se putea calcula și din $S = UI = 2\sqrt{10}\sqrt{2} = \sqrt{20}$ VA.

d) Factorul de putere al circuitului rezultă din $\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

5.8.15. a) $R = \frac{U_c^2}{P} = 10^3\ \Omega$;

b) $X_{L0} = X_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C} = 10^3\ \Omega$;

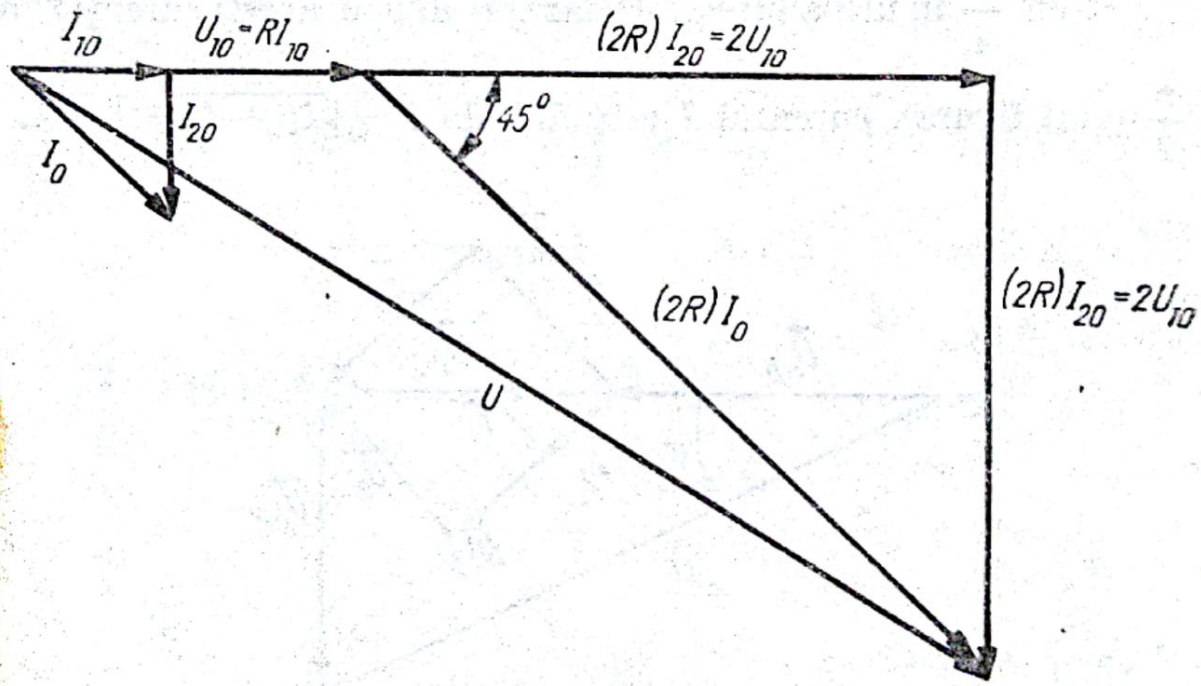


Fig. 5.8.15. R.

c) și

e) $U_{20} = \sqrt{Q_0 X_{L0}} = 273$ V, $U_{10} = U_{20}$, $I_{10} = I_{20} = \sqrt{\frac{Q_0}{Y_{L0}}} = \frac{\sqrt{7,5}}{10} = 0,274$ A.

Din diagramă $I_0 = \sqrt{2}\, I_{10} = 0,386$ A;

$U = \sqrt{(3\,U_{10})^2 + (2\,U_{10})^2} = \sqrt{13}\, U_{10} = 985$ V, $U_R = \sqrt{2}\ U_{10} = U_{40} = U_{50} = 386$ V, $U_{1L0} = U_{100} = U_{1R} = U_{20}$;

d) $P_0 = RI_2^2 + RI_{10}^2 + RI_0^2 = 9\,RI_{10}^2 = 675$ W.

Scanned with OKEN Scanner

5.8.16. Se construiește diagrama vectorială a curenților și a tensiunilor separat pentru fiecare parte de circuit cu conexiunea serie-paralel, considerînd ca necunoscută curentul I.

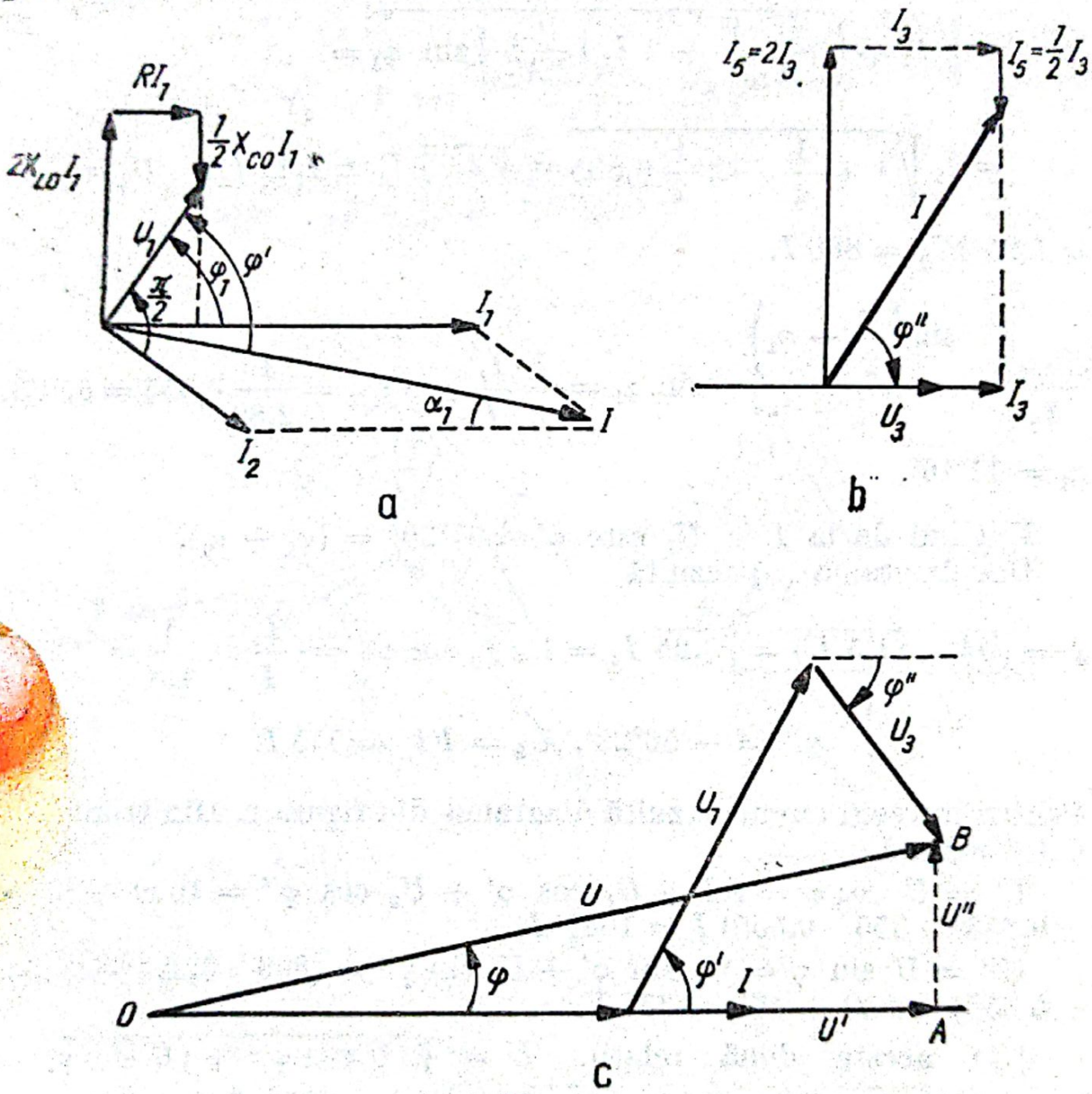


Fig. 5.8.16. R.

Din diagrama (a) rezultă

$$U_1 = \sqrt{R^2 + (1{,}5\,X_{L0})^2}\;\; I_1 = \sqrt{1 + 1{,}5^2}\;\; RI_1 = \sqrt{3{,}25}\cdot RI_1 =$$

$$= 1{,}8\;\; RI_1,\;\; \cos\varphi_1 = \frac{RI_1}{U_1} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555,\;\; \sin\varphi_1 \approx 0{,}835.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2\, I_1 I_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)} =$$

$$= \sqrt{I_1^2 + \left(\frac{U_1}{2\, X_{L0}}\right)^2 + 2\, I_1 \left(\frac{U_1}{2\, X_{L0}}\right) \sin\ \varphi_1} =$$

$$= I_1 \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 2\,\frac{1}{2}\, 0{,}835} = \sqrt{2{,}09}\ I_1 \approx 1{,}44\, I_1; \quad U_1 =$$

$= 1{,}25\, RI_1 = 866\, I.$

$$\frac{\sin \alpha_1}{I_2} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)}{I} \Rightarrow \sin\ \alpha_1 = \frac{1}{2}\,\frac{I_1}{I} \cdot \cos\varphi_1 = \frac{1}{2{,}88}\, 0{,}555 = 0{,}193,$$

$\alpha_1 = 11°10'.$

Unghiul de la I la U_1 este $\varphi' \approx 67°30' = (\varphi_1 + \alpha_1)$.

Din diagrama (b) rezultă

$$I = \sqrt{I_3^2 + (1{,}5\ I_3^2)} = \sqrt{3{,}25}\ I_3 = 1{,}8\, I_3 \cos\ \varphi'' = \frac{I_3}{I} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555,$$

$$\varphi'' = -\ 56°20',\ U_3 = RI_3 = 555\, I.$$

Pentru întregul circuit rezultă diagrama din figura c. Din triunghiul OAB rezultă

$U' = U\ \cos\ \varphi = RI + U_1\ \cos\ \varphi' + U_3\ \cos\ \varphi'' = 1000 + 866 \times$
$\times 0{,}383 + 555 \cdot 0{,}555)\, I = 1640\ I,$

$U'' = U\ \sin\ \varphi = U_1\ \sin\ \varphi' + U_3\ \sin\ \varphi'' = (866 \cdot 0{,}924 - 555 \times$
$\times 0{,}835) = 800 - 463 = 337$ V.

Din aceste două relaţii, $U = \sqrt{(U\ \cos\ \varphi)^2 + (U\ \sin\ \varphi)^2} =$
$= \sqrt{1\,640^2 + 337^2}\, I = \sqrt{270 + 11{,}4} \cdot 100\ I = 1680$ I;

$$\operatorname{tg}\ \varphi = -\ \frac{337}{1\,640} \approx 0{,}205.$$

Ca urmare, pentru $U = 985$ V valoarea efectivă a curentului este

$$I = \frac{U}{1\,680} = \frac{985}{1\,680} = 0{,}586\ \text{A}.$$

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă

$$P = UI \cos \varphi = 565 \text{ W}.$$

5.8.17. b) $U_f = \dfrac{U_1}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}$;

a) $I_1 = I_2 = I_3 = I_f = \dfrac{U_f}{Z} = \dfrac{220}{5} = 44 \text{ A}$;

c) $P = 3\, U_f I_f \cos \varphi = 3\, RI_f^2 = 23{,}3 \text{ kW}$,
$Q = 3\, U_f I_f \sin \varphi = 3\, X_L I_f^2 = 17{,}5 \text{ kvar}$.

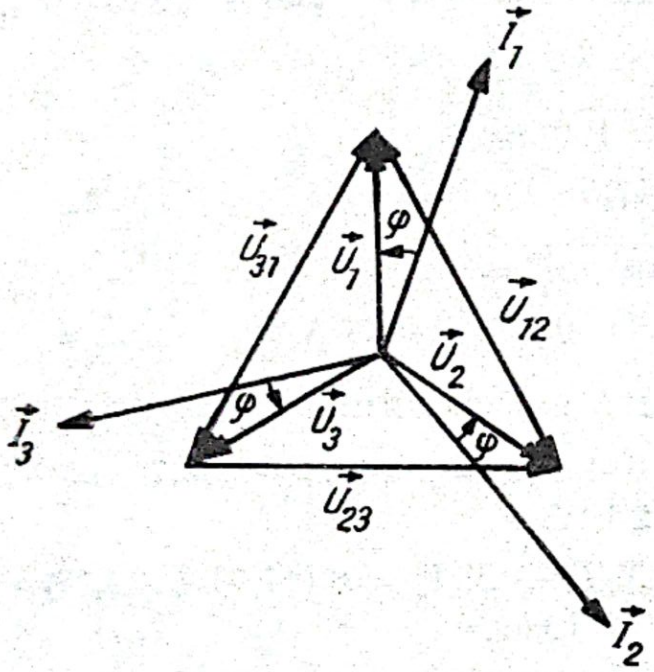


Fig. 5.8.17. R.

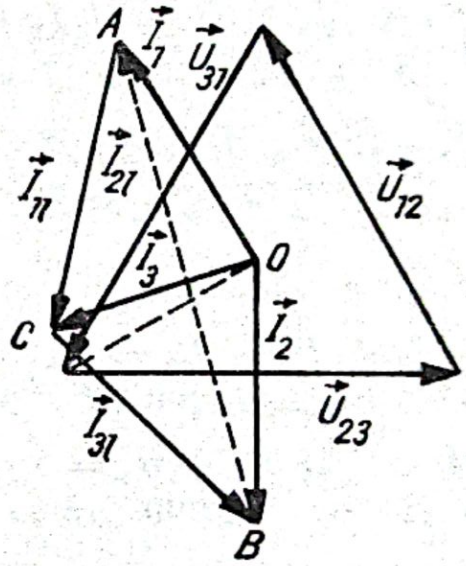


Fig. 5.8.19. R.

5.8.18. a) $I_1 = I_2 = I_3 = I_f = \dfrac{U_f}{Z} = \dfrac{380}{5} = 76 \text{ A}$;

b) $I_l = \sqrt{3}\, I_f = 132 \text{ A}$;

c) $P = 3\, RI_f^2 = 70 \text{ kW}$, $Q = 3\, X_L I_f^2 = 52{,}5 \text{ kvar}$;

d) se măresc de trei ori.

5.8.19. a) Curenţii de fază ai receptorului au valorile efective
$I_1 = \dfrac{U_f}{R} = \dfrac{380}{8} = 47{,}5 \text{ A}$, $I_2 = \dfrac{U_f}{X_L} = \dfrac{380}{8} = 47{,}5 \text{ A}$, $I_3 = \dfrac{U_f}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} =$
$= \dfrac{U_f}{Z} = 33{,}7 \text{ A}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Curenţii de linie $i_{1l} = i_1 - i_3$, $i_{2l} = i_2 - i_1$, $i_{3l} = i_3 - i_1$ au valori efective care se pot determina din diagrama vectorială a curenţilor (vezi figura) în care diferenţele se determină vectorial.

Din triunghiurile respective OAC, OAB, OBC, rezultă lungimile vectorilor $\vec{I}_{1l}$, $\vec{I}_{2l}$, $\vec{I}_{3l}$, care reprezintă mărimile sinusoidale i_{1l}, i_{2l}, i_{3l}. Aceste lungimi corespund (la scară) valorilor efective căutate.

Din aceste trei triunghiuri se obţine:

$$I_{1l} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 - 2 I_1 I_3 \cos 75°} =$$

$$= \sqrt{47{,}5^2 + 33{,}7^2 - 2 \cdot 47{,}5 \cdot 33{,}7 \cdot 0{,}259} = \sqrt{2\,260 + 1\,140 - 830} =$$

$$= \sqrt{2\,570} = 50{,}6 \text{ A}.$$

$$I_{2l} = \sqrt{I_2^2 + I_1^2 - 2 I_1 I_2 \cos 150°} =$$

$$= \sqrt{2\,260 + 2\,260 + 2 \cdot 47{,}5 \cdot 47{,}5 \cdot 0{,}866} = \sqrt{8\,420} = 91{,}6 \text{ A}.$$

$$I_{3l} = \sqrt{I_3^2 + I_2^2 - 2 I_2 I_3 \cos 75°} =$$

$$= \sqrt{1\,140 + 2\,260 - 2 \cdot 33{,}7 \cdot 47{,}5 \cdot 0{,}259} = 50{,}6 \text{ A}.$$

c) Puterile activă şi reactivă ale circuitului sînt

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = RI_1^2 + 0 + RI_3^2 = 8\,(47{,}5^2 + 33{,}7^2) =$$

$$= 8 \cdot 3\,400 = 27200 \text{ W} = 27{,}2 \text{ kW}.$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 + X_L I_2^2 + X_L I_3^2 = 8\,(47{,}5^2 + 33{,}7^2) =$$

$$= 8 \cdot 3400 = 27\,200 \text{ var} = 27{,}2 \text{ kvar}.$$

5.8.20.

$$\frac{U_{1p}}{U_{3s}} = \frac{\Phi_1 n_p}{\frac{\Phi_1}{2} n_s} \Rightarrow \frac{n_p}{n_s} = \frac{1}{2} \frac{U_{1p}}{U_{3s}} = \frac{1\,000}{10} = 100.$$

6.1. Utilizînd principiul superpoziţiei, forţa care acţionează asupra corpului punctual *1* este $\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14}$, unde forţele de respingere dintre corpuri au modulele:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q^2}{a^2} = 7{,}2 \text{ N}, \quad F_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2a^2} = 1{,}8 \text{ N},$$

$$F_{14} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2} = 3{,}6 \text{ N}$$

Scanned with OKEN Scanner

și orientările din fig. 6.1.R. Rezultă :

a) $F_1 = [(F_{12} + F_{13})^2 + F_{14}^2 - 2\,(F_{12} + F_{13})\,F_{14} \cos 45°]^{1/2} = 6{,}94$ N ;

b) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{(F_{12} + F_{13}) \sin 45°}{(F_{12} + F_{13}) \cos 45° + F_{14}} = 0{,}639.$

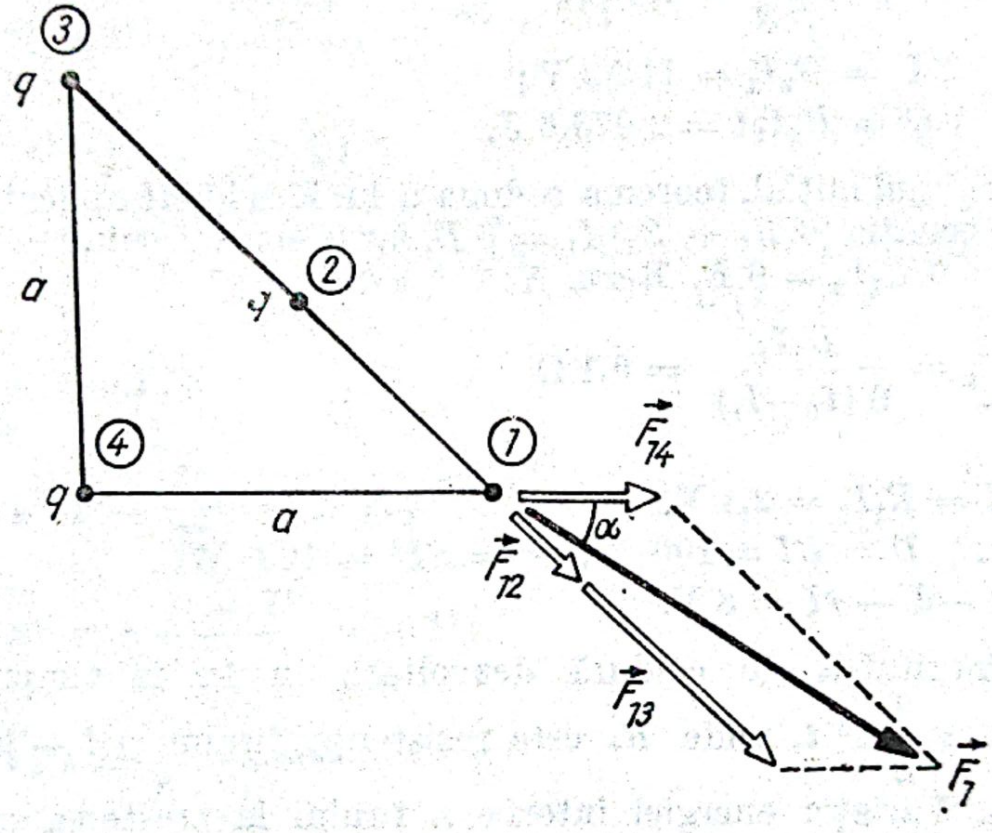


Fig. 6.1. R.

6.2. a) $d = \dfrac{\varepsilon_0 S}{C} = 2$ cm ;

b) $C_s = \dfrac{C}{10} = 0{,}5$ pF, $C_p = 10\,C = 50$ pF.

6.3. În cazul cînd, la punerea în paralel a condensatoarelor, se leagă între ele bornele de aceleași polarități ale acestora, se obține ca la problema 2.4.12

$$U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} = 3\,000 \text{ V},$$

$$Q_1 = C_1 U = 6 \text{ mC},$$

$$Q_2 = C_2 U = 15 \text{ mC}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul în care condensatoarele se leagă în opoziție

$$U = \frac{C_1U_1 - C_2U_2}{C_1 + C_2} \approx 143 \text{ V},$$

$Q_1 = C_1U \approx 286$ μC, $Q_2 = C_2U \approx 715$ μC.

6.4. a) $R_2 = \rho\frac{l}{S} = 6{,}4\ \Omega$;

b) $U = R_2I_1 = 11{,}52$ V;

c) $Q = R_2I_1^2t = 2\,073{,}6$ J.

În regimul inițial, teorema a doua a lui Kirchhoff aplicată circuitului dă ecuația $(6\ R_1 + R_2)\ I_1 = 6\ E$, iar la scurtcircuitarea bornelor bateriei : $6\ R_1I_2 = 6\ E$. Rezultă :

d) $R_1 = \frac{R_2I_1}{6\ (I_2 - I_1)} = 0{,}1\ \Omega$

și

e) $E = R_1I_2 = 2{,}1$ V.

6.5. a) $U = RI = 100$ V, $P = RI^2 = 100$ W,

$U_f = E - U - rI = 8$ V.

b) Cantitatea de căldură dezvoltată în fir în timpul t este $R_f\ I^2t = \rho\frac{l}{S}I^2\ t$, unde R_f este rezistența firului și l — lungimea acestuia. Variația energiei interne a firului la creșterea cu $\Delta\theta$ a temperaturii sale este : $mc\Delta\theta = dlSc\Delta\theta$. Admițînd că toată căldura dezvoltată în fir servește la încălzirea acestuia rezultă

$$\Delta\theta = \frac{\rho I^2t}{dcS^2} = 3{,}05\ ^\circ\text{C}.$$

6.6. a) $I = \frac{U_1}{R_1} = 2$ A;

b) $r = \frac{E - U}{I} = 1\ \Omega$;

c) $R_2 = \frac{U_2}{I} = \frac{U - U_1}{I} = 1\ \Omega$;

$$l = \frac{R_2S}{\rho} = 20\text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.7. a) $S = \frac{\rho l}{R} = 5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}^2 = 0{,}5\ \text{mm}^2$;

b) $I = \sqrt{\frac{P}{R}} = 0{,}2\ \text{A}$;

c) $t = \frac{Q}{P} = \frac{56{,}445}{4{,}1868 \cdot 1{,}176} \approx 11{,}5\ \text{s}$;

d) $U = \frac{P}{I} = 5{,}88\ \text{V}$;

e) $(6r + R)I = 6E$, $6rI_0 = 6E \Rightarrow E = \frac{RII_0}{6(I_0 - I)} = 1\ \text{V}$,

$r = \frac{E}{I_0} = 0{,}1\ \Omega$.

6.8. a) $I = \frac{P}{U} = 0{,}2\ \text{A}$;

b) $r = \frac{E - U}{I} = 10\ \Omega$;

c) $t = \frac{Q}{I} = 3\,600\ \text{s} = 1\ \text{h}$;

d) $R = \frac{U}{I} = 150\ \Omega$, $l = \frac{RS}{\rho} = 150\ \text{m}$;

e) $W = P \cdot t = 3\,600\ \text{J}$.

6.9. a) Secţiunea firului este $S = \frac{\rho_0 l}{R_0} = 0{,}1965 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2$, masa firului $m = d_0 lS = \frac{\rho_0 d_0 l^2}{R_0} = 0{,}175\ \text{kg}$, greutatea firului $G = mg = 1{,}75\ \text{N}$.

b) Cantitatea de căldură dezvoltată prin efect Joule în fir este $Q = \frac{U^2}{R} \cdot t$, variaţia energiei interne a firului este $mc\ (\theta - \theta_0)$, astfel încît neglijînd pierderile, $\theta = \theta_0 + \frac{U^2 \cdot t}{Rmc} = 200°\text{C}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $\Delta V = 3\alpha\theta V_0 = 3\alpha\theta lS = 2{,}1 \cdot 10^{-7}\ \text{m}^3$;

d) $R = R_0(1 + \beta\theta) = 15{,}65\ \Omega$.

6.10. a) $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 3{,}33\ \Omega$;

b) $I = \dfrac{nE}{nr_i + R} = 2{,}73\ \text{A}$;

c) $U = RI$, $I_1 = \dfrac{U}{R_1} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} I = 0{,}455\ \text{A}$, $I_2 = I - I_1 = 2{,}275\ \text{A}$;

d) $mc(\theta_f - \theta_0) = \eta R_1 I_1^2 t \Rightarrow m = 19{,}9\ \text{g}$;

e) $m' = kI_2 t = 0{,}826\ \text{g}$.

6.11. a) În fig. 6.11. R este reprezentată schema echivalentă a circuitului. Rezultă

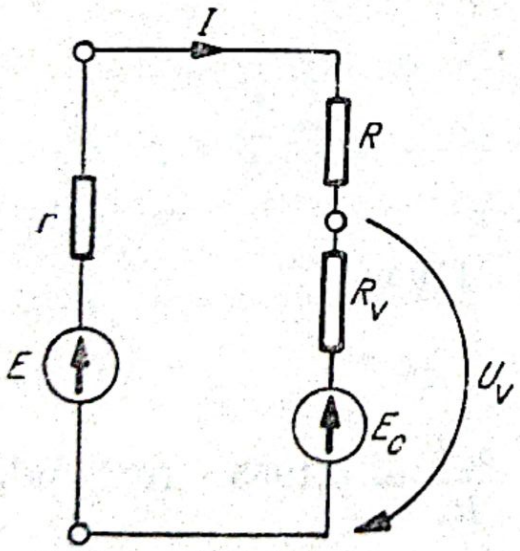


Fig. 6.11. R.

$$I = \frac{E - E_c}{r + R + R_v} = 2{,}5\ \text{A},$$
$$U_v = R_v I + E_c = E - (r + R) I = 4{,}25\ \text{V}.$$

b) Masa hidrogenului produs prin electroliză în timpul t este: $m = \dfrac{A}{F} \times \dfrac{1}{n} It$. Din legea gazelor perfecte $pV = \dfrac{m}{M} RT$, rezultă volumul ocupat de hidrogenul molecular

$$V = \frac{A}{M} \frac{1}{nF} It \frac{RT}{p} = 0{,}28\ \text{l}.$$

6.12. a) Rezistența totală a circuitului este $R = r + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 3{,}8\ \Omega$, intensitatea curentului principal $I = \dfrac{E}{R} = 10\ \text{A}$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $I_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} I = 7{,}5$ A;

c) $I_1' = \dfrac{E}{r + R_1} = 7{,}525$ A, $\dfrac{I'}{I} = 1 + \dfrac{rR_1}{(r + R_1)R_2} = 1{,}0033.$

6.13. a) Rezistența echivalentă a rezistorului și firului în paralel $R_p = \dfrac{RR_f}{R + R_f} = 12\ \Omega$, intensitatea curentului bateriei $I = \dfrac{ne}{R_p + nr} = 2$A, tensiunea la bornele rezistorului $U = R_p I = 24$ V;

b) $I_R = \dfrac{U}{R} = 1{,}2$ A, $I_f = \dfrac{U}{R_f} = 0{,}8$ A;

verificare $I_R + I_f = I$;

c) $l = \dfrac{R_f S}{l_1} = 2 \cdot 10^{-8}$ m;

d) $P = UI_R = 28{,}8$ W, $Q = P \cdot t = 34\,560$ J $= 8294{,}4$ cal;

e) Noua valoare a rezistenței echivalente a rezistorului și firului în paralel fiind R_p', tensiunea la bornele rezistorului $U' = 0{,}9\,U = 21{,}6$ V se poate scrie $U' = R_p' I' = \dfrac{R_p' \cdot ne}{R_p' + nr}$, de unde $R_p' = \dfrac{nrU'}{ne - U'} = 7{,}71\ \Omega.$

Firul are rezistența $R_f' = \dfrac{RR_p'}{R - R_p'} = 12{,}56\ \Omega$ și lungimea $l_2 = \dfrac{R_f' \cdot S}{\rho} = 188{,}4$ m.

6.14. a) $x + y = 200\ \Omega$, $I = \dfrac{E}{r + \dfrac{xy}{x + y}} \Rightarrow xy = 6156\ \Omega^2$;

Scanned with OKEN Scanner

se formează ecuația $z^2 - 200\,z + 6156 = 0$, de unde $x = z_1 = 38\ \Omega$, $y = z_2 = 162\ \Omega$ (și invers);

b) $I_x = \dfrac{y}{x+y}\,I = 0{,}405\ \text{A}$, $I_y = \dfrac{x}{x+y}\,I = 0{,}095\ \text{A}$;

c) $U = \dfrac{xy}{x+y}\,I = 15{,}39\ \text{V}$ sau $U = E - rI$;

d) $P = UI = 7{,}695\ \text{W}$.

6.15. a) $R = r + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 18\ \Omega$;

b) $I = \dfrac{E}{R} = 5\ \text{A}$, $I_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\,I = 3\ \text{A}$, $I_2 = I - I_1 = 2\ \text{A}$;

c) $m = m_1 + m_2 = kIt = 0{,}9\ \text{g}$.

6.16. a) Tensiunea la bornele rezistorului R_2 este $U_2 = R_2 I_2 = 12\ \text{V}$, de unde $I_3 = \dfrac{U_2}{R_3} = 2\ \text{A}$ și $I_1 = I_2 + I_3 = 5\ \text{A}$;

b) $E = \left(r + R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right) I_1 = 25\ \text{V}$;

c) $U_1 = R_1 I_1 = 10\ \text{V}$;

$U = U_1 + U_2 = 22\ \text{V}$ sau $U = E - rI_1$;

d) Puterea cedată la borne de baterie este $P = UI_1 = 110\ \text{W}$, puterile consumate în rezistoare sînt $P_1 = R_1 I_1^2 = 50\ \text{W}$, $P_2 = R_2 I_2^2 = 36\ \text{W}$, $P_3 = R_3 I_3^2 = 24\ \text{W}$;
se verifică $P = P_1 + P_2 + P_3$.

6.17. a) $R_1 = \dfrac{E}{I} - \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 4{,}5\ \Omega$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $I_2 = \dfrac{R_3}{R_2 + R_3} I = 1{,}5$ A, $I_3 = I - I_2 = 0{,}5$ A;

c) $W_2 = R_2 I_2^2 t = 8100$ J, $W_3 = R_3 I_3^2 t = 2700$ J.

6.18. a) $U = E - rI = 125$ V;

b) $U_f = R_f I = 17$ V;

c) $S = \dfrac{\rho \cdot 2d}{R_f} = 10^{-6}$ m^2 $= 1$ mm^2;

d) $I_1 = \dfrac{U - U_f}{R_1} = 1{,}667$ A, $I_2 = I - I_1 = 3{,}333$ A, $R_2 = \dfrac{U - U_f}{I_2} = 32{,}4\ \Omega$;

e) $P = (U - U_f) I = 540$ W.

6.19. Schema echivalentă a circuitului este reprezentată în fig. 6.19. R. S-au notat : $R = 15{,}9\ \Omega$ — rezistența rezistorului, $E =$

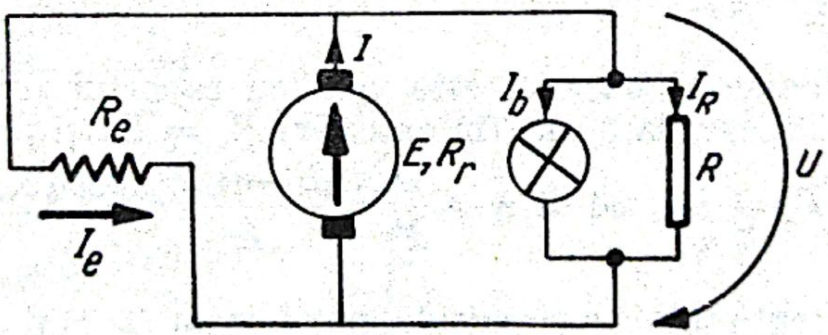


Fig. 6.19. R.

$= 110$ V — t.e.m. în indus (rotor), $R_r = 0{,}5\ \Omega$ — rezistența indusului, $R_e = 30\ \Omega$ — rezistența inductorului (înfășurarea de excitație a statorului), $I = 12$ A — intensitatea curentului rotorului, I_e, I_b, I_R — intensitățile curenților din înfășurarea de excitație, din bec și din rezistor. Tensiunea la bornele generatorului este $U = E - R_r I = 104$ V.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă :

$$I_e = \frac{U}{R_e} = 3{,}466 \text{ A};$$

$$I_R = \frac{U}{R} = 6{,}54 \text{ A};$$

$$I_b = I - I_e - I_R \approx 2 \text{ A}$$

și

a) $P_b = U I_b = 208$ W;

b) $W_R = U I_R t \approx 2{,}44 \cdot 10^6$ J.

6.20. a) Rezistența totală a circuitului $R = r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4 = 7\ \Omega$, intensitatea curentului debitat de baterie : $I = \frac{E}{R} = 2$ A, intensitățile curenților în rezistoarele R_1 și R_2 : $I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = 1{,}5$ A, $I_2 = I - I_1 = 0{,}5$ A;

b) Randamentul bateriei este egal cu raportul dintre puterea debitată de aceasta la borne (în exterior) $P_b = UI$ și puterea totală consumată $P_c = EI$, adică $\eta = \frac{U}{E} = \frac{E - rI}{E} = 92{,}85\ \%$;

c) Rezistența totală a circuitului nou format $R' = r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_v = 5\ \Omega$, intensitatea curentului debitat de baterie $I' = \frac{E}{R'} = 2{,}8$ A, puterea debitată de baterie în circuit $P'_b = U' I' = (E - rI')\, I' = 3{,}528$ W, timpul în care cedează circuitului energia $W = 35\,280$ J este $t = \frac{W}{P'_b} = 10^4$ s. Rezultă masa de cupru depusă la catodul voltametrului $m = k I' t = 9{,}24$ g.

Scanned with OKEN Scanner

6.21. a) $Q = R_e I^2 t$, $I = \dfrac{E}{r + R_e} \Rightarrow R_e^2 - \left(\dfrac{E^2 t}{Q} - 2r\right) R_e + r^2 = 0$, $R_e^2 - 11{,}52\ R_e + 0{,}25 = 0 \Rightarrow R_e' = 11{,}5\ \Omega$; $R_e'' = 0{,}0217\ \Omega$;

b) $I' = \dfrac{E}{r + R_e'} = 1$ A, $I'' = \dfrac{E}{r + R_e''} = 23$ A, soluția a doua corespunde aproximativ cazului scurtcircuitării sursei $I_{sc} = \dfrac{E}{r} = 24$ A;

c) La deconectarea rezistorului R_1, intensitatea curentului din circuit este $\dfrac{E}{r + R_2} = \dfrac{I}{2}$, de unde: $R_2 = \dfrac{2E}{I} - r$, cu soluțiile $R_2' = 23{,}5\ \Omega$ și $R_2'' = 0{,}54\ \Omega$, corespunzătoare celor două valori ale intensității curentului.

Din relația $R_e = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, rezultă $R_1 = \dfrac{R_2 R_e}{R_2 - R_e}$, cu soluțiile $R_1' = 22{,}5\ \Omega$ și $R_1'' = 0{,}0226\ \Omega$.

6.22. a) Schema circuitului este reprezentată în fig. 6.22. R. Bilanțul de puteri al rețelei se exprimă sub forma: $EI = (r_i + R)\ I^2 + P_1 + P_2$, de unde rezultă ecuația $I^2 - 10\ I + 25 = 0$, cu soluțiile confundate $I = 5$ A. Corespunzător $R_e = \dfrac{U}{I} = \dfrac{E}{I} - (r_i + R) = 2{,}4\ \Omega$ sau $R_e = \dfrac{P_1 + P_2}{I^2}$;

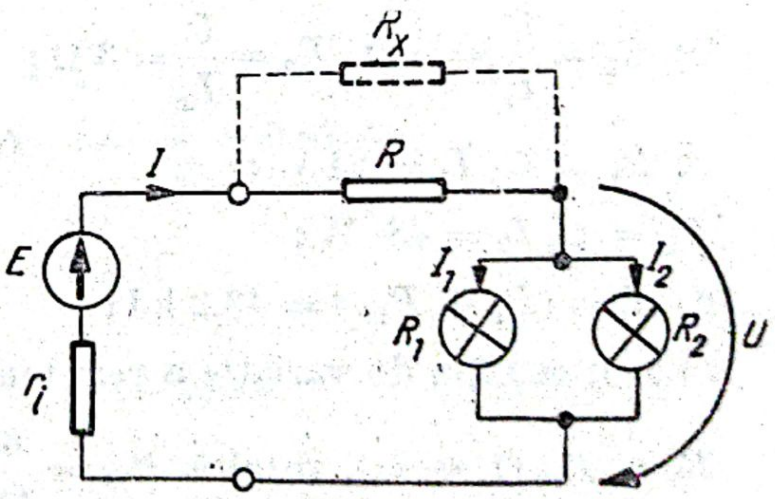


Fig. 6.22. R.

b) $U = E - (r_1 + R)\ I = 12$ V sau $U = R_e I$;

c) $I_1 = \dfrac{P_1}{U} = 2$ A, $I_2 = \dfrac{P_2}{U} = 3$ A, $R_1 = \dfrac{U}{I_1} = 6\ \Omega$, $R_2 = \dfrac{U}{I_2} = 4\ \Omega$. Se presupune că rezistența becurilor rămîne constantă la variația puterii dezvoltate de acestea (nu se ia în considerare

Scanned with OKEN Scanner

variaţia rezistenţei filamentelor în funcţie de temperatura acestora), astfel încît noua intensitate a curentului este $I' = \sqrt{\frac{P}{R_e}} = 6$ A.

Rezistenţa echivalentă a rezistoarelor R şi R_x în paralel este $R' = \frac{E}{I'} - (r_i + R_e) = 1{,}1\ \Omega$. Rezultă $R_x = \frac{R R'}{R - R'} = 2{,}61\ \Omega$.

6.23. a) Rezistenţa echivalentă a încălzitorului este

$$R = R_1 + \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} + R_5 = 144\ \Omega.$$

Puterea pe care o dezvoltă este $\frac{Q}{t} = \frac{U^2}{R}$, de unde $U = \sqrt{\frac{Q R}{t}} = 120$ V.

b) $mc(\theta_f - \theta_i) = Q \Rightarrow m = 119{,}7$ g.

6.24. a) Intensitatea curentului debitat de baterie este $I = I_1 + I_2 = 6$ A, tensiunea la bornele acesteia este: $U = n(e - rI) = 18$ V, iar tensiunea la bornele becurilor $U_b = U - RI = 12$ V;

b) $R_1 = \frac{U}{I_1} = 6\ \Omega$, $R_2 = \frac{U}{I_2} = 3\ \Omega$;

c) $P_1 = U_b I_1 = 24$ W;

$P_2 = U_b I_2 = 48$ W;

d) $W = (P_1 + P_2)\, t = 43{,}2$ kJ;

e) Din ecuaţia de variaţie a rezistenţei becului cu temperatura:

$R_1 = R_{10}(1 + \alpha t)$, rezultă $R_{10} = \frac{6}{11} = 5{,}45\ \Omega$.

6.25. a) În regim normal de funcţionare, becul B_1 este parcurs de un curent cu intensitatea $I_4 = \frac{P_{B1}}{U_1} = 0{,}545$ A, iar becul B_2 de un curent cu intensitatea $I_5 = \frac{P_{B2}}{U_1} = 0{,}91$ A;

Scanned with OKEN Scanner

rezistorul R trebuie să permită trecerea curentului $I_R = I_5 - I_4 = 0{,}365$ A, cînd are la borne tensiunea $U_1 = 110$ V, deci rezistenţa sa este $R = \frac{U_1}{I_R} = 302\ \Omega$;

b) $I_6 = \frac{P_{B3}}{U_2} = 0{,}91$ A, $I_3 = I_5 + I_6 = 1{,}82$ A, $I_2 = \frac{P_c}{U_2} = 2{,}275$ A, $I_1 = I_2 + I_3 = 4{,}095$ A;

c) $P_R = RI_R^2 = U_1 I_R = 40{,}15$ W;

d) rezistenţele firelor de legătură sînt $R_{l_1} = R_{l_2} = \rho \frac{l_1}{\pi D^2/4} = 0{,}062\ \Omega$, puterile dezvoltate în fir sînt $P_{l_1} = R_{l_1} I_1^2 = 1{,}04$ W, $P_{l_2} = R_{l_2} I_3^2 = 0{,}206$ W, iar puterea totală pierdută în fire este $P_l = P_{l_1} + P_{l_2} \approx 1{,}25$ W.

6.26. a) Tensiunea electromotoare echivalentă a bateriei este $E = 5e = 10$ V, iar rezistenţa interioară echivalentă a acesteia este $R_i = \frac{5r_i}{4} = 0{,}025\ \Omega$;

b) $I = \frac{E}{R_i + R} = 2{,}44$ A, $i = \frac{I}{4} = 0{,}61$ A;

c) $U = RI = E - R_i I = 9{,}94$ V;

d) $I' = \frac{E}{R_i} = 400$ A, $i' = \frac{I'}{4} = 100$ A.

6.27. Notînd cu U tensiunea la bornele surselor (fig. 6.27.R), intensităţile curenţilor rezultă:

$$I_1 = \frac{1}{r_1}(E_1 - U), \quad I_2 = \frac{1}{r_2}(E_2 - U),$$

$$I_3 = \frac{1}{r_3}(E_3 - U), \quad I = \frac{U}{R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuația $I_1 + I_2 + I_3 = I$ rezultă

$$U = \frac{\dfrac{E_1}{r_1} + \dfrac{E_2}{r_2} + \dfrac{E_3}{r_3}}{\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} + \dfrac{1}{R}} = 1{,}1593 \text{ V}$$

și corespunzător, $I_1 = 0{,}407$ A, $I_2 = -0{,}296$ A, $I_3 = 0{,}469$ A și $I = 0{,}580$ A.

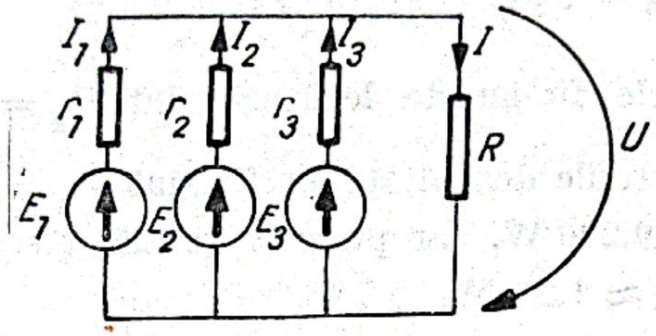


Fig. 6.27. R.

6.28. a) Notînd cu U tensiunea la bornele surselor, cu $g_j = \dfrac{1}{r_j}$ conductanțele interne ale acestora și cu $G = \dfrac{1}{R}$ conductanța rezistorului, intensitățile curenților prin surse sînt $I_j = g_j(E - U)$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, iar intensitatea curentului prin circuitul exterior $I = GU$. Din ecuația

$$I = \sum_{j=1}^{n} I_j, \quad \text{se obține} \quad U = \frac{\sum_{k=1}^{n} g_k}{G + \sum_{k=1}^{n} g_k} E,$$

de unde

$$I_j = \frac{Gg_j}{G + \sum_{k=1}^{n} g_k} E \quad \text{și} \quad I = \frac{G \sum_{k=1}^{n} g_k}{G + \sum_{k=1}^{n} g_k} E.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Puterile furnizate de surse sînt $P_j = UI_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$;

c) puterile degajate sub formă de căldură în elementele galvanice sînt $p_j = r_j I_j^2$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, iar puterea din circuitul exterior $P_R = RI^2 = GU^2$.

6.29. În fig. 6.29. R este reprezentată schema echivalentă a circuitului. Tensiunile la bornele AB, în cele patru cazuri, sînt:

$$U_1 = \frac{\dfrac{rR_1}{r + R_1}}{R - r + \dfrac{rR_1}{r + R_1}} E,$$

$$U_2 = \frac{\dfrac{rR_2}{r + R_2}}{R - r + \dfrac{rR_2}{r + R_2}} E,$$

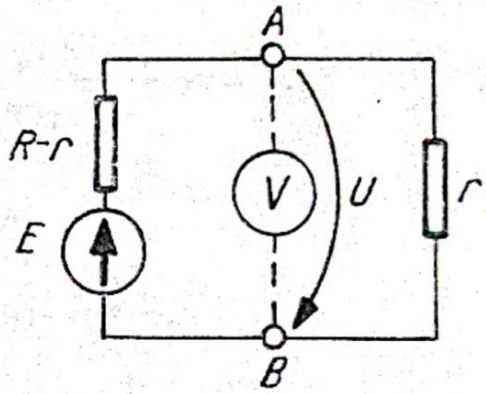


Fig. 6.29. R.

$$U_3 = \frac{r}{R} E, \qquad U_4 = E.$$

De aici rezultă succesiv

$$\frac{U_4}{U_1} = 1 + \left(\frac{R}{r} - 1\right)\left(\frac{r}{R_1} + 1\right) = \left(\frac{U_4}{U_3} - 1\right)\frac{r}{R_1} + \frac{U_4}{U_3},$$

$$r = \frac{U_4(U_3 - U_1)}{U_1(U_4 - U_3)} R_1 = 2\,600\ \Omega, \qquad R = \frac{U_4}{U_3} r = 3250\ \Omega.$$

Similar, $r = \dfrac{U_4(U_3 - U_2)}{U_2(U_4 - U_3)} R_2$, de unde

$$R_2 = \frac{U_2(U_3 - U_1)}{U_1(U_3 - U_2)} R_1 = 26\,520\ \Omega.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.30. a) Rezistența șuntului este $r_s = \dfrac{r_0}{\dfrac{I_{max}}{i_0} - 1} = 0{,}2\ \Omega$;

b) rezistența adițională $r_a = \dfrac{U_{max}}{i_0} - r_0 = 290{,}2\ \Omega$.

c) În fig. 6.30. R este reprezentată schema circuitului; rezistența echivalentă totală este

$$R = r + \frac{r_s r_0}{r + r_0} + \frac{R_1 (r_a + r_0)}{R_1 + r_a + r_0} + R_2 = 6{,}18\ \Omega.$$

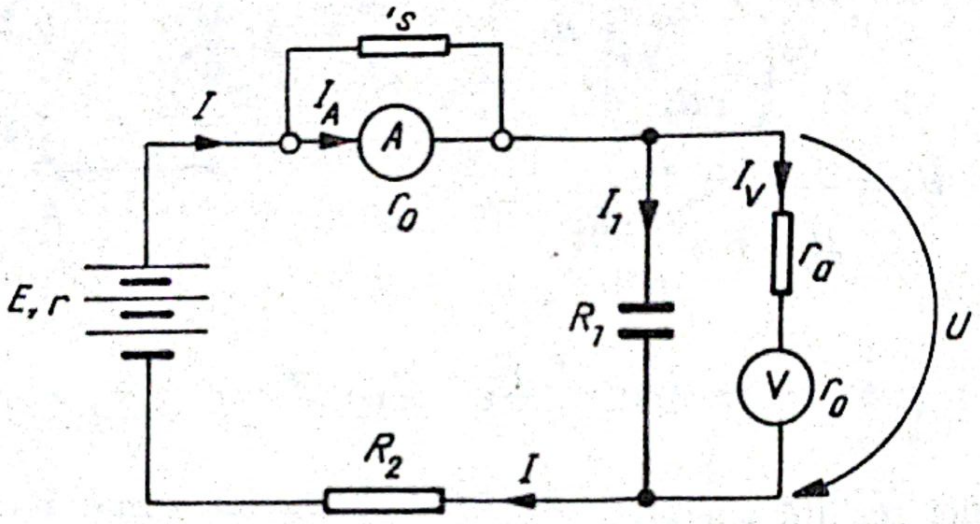


Fig. 6.30. R.

intensitatea curentului debitat de sursă $I = \dfrac{E}{R} = 3{,}88$ A;

d) intensitatea curentului în voltametru $I_1 = \dfrac{r_a + r_0}{R_1 + r_a + r_0} I =$

$= 3{,}86$ A;

masa argintului depus la catod: $m = kI_1 t = 31{,}1$ g.

6.31. a) $I_2 = \dfrac{m}{k \cdot t} = 2$ A;

b) $I = I_1 + I_2$, $rI + (R_1 + R_3) I_1 = E \Rightarrow I_1 = \dfrac{E - rI_2}{r + R_1 + R_3} = 1$ A,

$I = 3$ A;

Scanned with OKEN Scanner

c) $W = UIt = (E - rI)\,It = 97\,200$ J;

d) $I_{BD} = 0 \Rightarrow R_1R_4 = R_2R_3, \quad R_4 = 2{,}4\ \Omega$;

e) $R_s = \dfrac{R_g}{\dfrac{I'_g}{I_g} - 1} = 11{,}11\ \Omega.$

6.32. a) $I_1 + I_2 = I_3, \quad R_1I_1 + R_3I_3 = E_1, \quad R_2I_2 + R_3I_3 = E_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_1 = \dfrac{1}{N}[(R_2 + R_3)E_1 - R_3E_2], \quad I_2 = \dfrac{1}{N}[(R_1 + R_3)E_2 - R_3E_1],$

$I_3 = \dfrac{1}{N}(R_2E_1 + R_1E_2), \quad N = R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1$;

b) Cînd semnele intensităţilor curenţilor sînt pozitive, sensurile acestora coincid cu sensurile de referinţă din fig. 6.32, în cazul contrar, sensurile lor sînt orientate invers. Deoarece $N > 0$, semnele intensităţilor curenţilor sînt determinate de semnele numărătoarelor din expresiile acestora. De exemplu: $I_1 > 0 \Leftrightarrow (R_2 + R_3)E_1 > R_3E_2$, $I_1 = 0 \Leftrightarrow (R_2 + R_3)E_1 = R_3E_2$, $I_1 < 0 \Leftrightarrow (R_2 + R_3)E_1 < R_3E_2$ etc.;

c) $I_3 = 0 \Leftrightarrow R_2E_1 + R_1E_2 = 0$.

6.33. a) $I = \dfrac{R_2E_1 + R_1E_2}{R_1R_2 + R_1R + R_2R} = 0{,}01$ A;

b) $l_1 = \dfrac{R_1S}{\rho} = 250$ m;

c) $R' = R(1 + a\theta) = 300\ \Omega$;

d) $I_2 = 0 \Leftrightarrow (R_1 + R)E_2 = RE_1$, condiţie îndeplinită de datele problemei;

e) $I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = I = 0{,}01$ A, $W_1 = R_1I_1^2t = 12{,}5 \cdot 10^{-6}$ kWh.

6.34. a) Tensiunea la bornele sursei este $U'_{AB} = E - rI' = 4{,}2$ V, intensitatea curentului prin aceasta se scrie:

$$I' = \left(\frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2 + R_x}\right) U'_{AB}, \text{ de unde } R_x = 4\ \Omega;$$

Scanned with OKEN Scanner

b) energia debitată de sursă în circuit în $t = 120$ s este $W' = U'_{AB} \cdot I' \cdot t = 504$ J;

c) rezistența echivalentă totală a circuitului este $R''_e = r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_x}{R_3 + R_x} = 5\ \Omega$, intensitatea curentului prin sursă rezultă $I'' = \frac{E}{R''_e} = 1{,}04$ A;

d) $U_{CD} = 0 \Leftrightarrow R_1 R_x = R_2 R_3 \Rightarrow R_x = 1{,}5\ \Omega$;

e) $U'_{CD} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_3} - \frac{R_2}{R_2 + R_x}\right) U'_{AB} = 1$ V, $C = \frac{Q}{U'_{CD}} = 10^{-6}$ F $= 1\ \mu$F.

6.35. a) Aplicînd teoremele lui Kirchhoff circuitului, rezultă ecuațiile

$$I_1 + I_2 = I, \quad r_1 I_1 + RI = E_1, \quad (r_2 + r) I_2 + RI = E_2,$$

unde

$$E_1 = n_1 e = 12\ \text{V}, \qquad E_2 = n_2 e = 10\ \text{V},$$

$$r_1 = n_1 r_i = 1{,}2\ \Omega, \qquad r_2 = n_2 r_i = 1\ \Omega$$

sînt tensiunile electromotoare și rezistențele interioare echivalente ale celor două baterii de acumulatoare. Se obțin intensitățile curenților surselor

$$I_1 = \frac{(r_2 + r) E_1 + R(E_1 - E_2)}{(r_1 + R)(r_2 + r) + r_1 R} = \frac{12\, r + (2R + 12)}{(R + 1{,}2)\, r + (2{,}2\, R + 1{,}2)},$$

$$I_2 = \frac{r_1 E_2 + R(E_2 - E_1)}{(r_1 + R)(r_2 + r) + r_1 R} = \frac{12 - 2R}{(R + 1{,}2) r + (2{,}2\, R + 1{,}2)}.$$

Pentru ca I_1 să nu depindă de r, coeficienții polinoamelor în r de la numărător și numitor trebuie să fie proporționali

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{12}{R+1,2} = \frac{2R+12}{2,2R+1,2}$, de unde $R' = 0$ (soluţia banală) şi $R'' = 6\ \Omega$.

b) Cînd $R = 2\ \Omega$, intensităţile curenţilor surselor sînt $I_1 = \frac{12r+16}{3,2r+5,6}$ şi $I_2 = \frac{8}{3,2r+5,6}$, cărora le corespund reprezentările grafice din fig. 6.35. R.

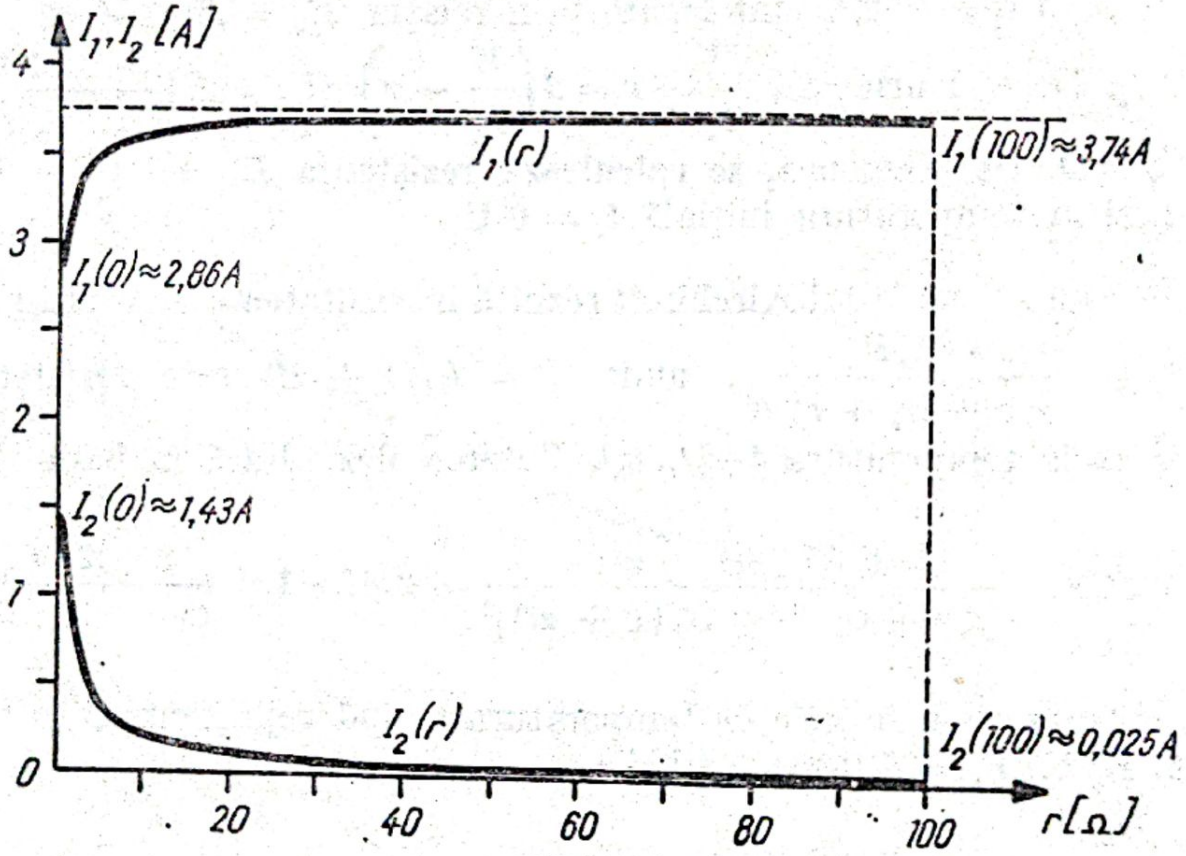


Fig. 6.35. R.

c) Pentru $r = 0$ şi R oarecare, $I = I_1 + I_2 = \frac{24}{2,2R+1,2}$, puterea dezvoltată în R este $P = RI^2 = \frac{576R}{(2,2R+1,2)^2}$. Maximul este atins cînd $\frac{dP}{dR} = 0$; rezultă $R = \frac{6}{11} = 0,545\ \Omega$.

Scanned with OKEN Scanner

d) $R_t = R(1 + \alpha t)$, $t = \dfrac{R_t - R}{\alpha R} = 50°C$.

6.36. a) Schema echivalentă a circuitului este reprezentată în fig. 6.36. R, a. Aplicînd teoremele lui Kirchhoff se obţin ecuaţiile: $I_r = I + I_e$, $rI_r + RI = E$, $RI = r_e I_e$, din care rezultă rezistenţa barei $R = \dfrac{r_e\left(\dfrac{E}{I} - r\right)}{(r + r_e)}$. Valorile R_1 şi R_2 ale acesteia la temperaturile $t_1 = 0°C$ şi $t_2 = 250°C$ sînt legate prin relaţia $R_2 = R_1(1 + \alpha t_2) = 2R_1$. De aici urmează $\dfrac{E}{I_2} - r = 2\left(\dfrac{E}{I_1} - r\right)$ şi $r = E\left(\dfrac{2}{I_1} - \dfrac{1}{I_2}\right) = 10^{-3}\ \Omega$. De asemenea, se calculează rezistenţa $R_1 = 9{,}4 \cdot 10^{-3}\ \Omega$ a barei la temperatura iniţială $t_1 = 0°C$.

b) Din ecuaţiile lui Kirchhoff rezultă intensitatea curentului prin bară $I = \dfrac{r_e E}{r_e r + (r_e + r) R}$, unde $R = R_1(1 + \alpha t)$ este rezistenţa acesteia la temperatura $t \in [t_1, t_2]$. Puterea dezvoltată în bară este

$$P = RI^2 = \frac{r_e^2 E^2 R_1 (1 + \alpha t)}{[r_e r + (r_e + r) R_1 (1 + \alpha t)]^2} = 2{,}87 \cdot 10^6 \frac{t + 250}{(t + 276{,}3)^2},$$

dependenţa sa în funcţie de temperatura t fiind reprezentată în fig. 6.36. R, b. $P_1 = P(0) = 9{,}4$ kW;

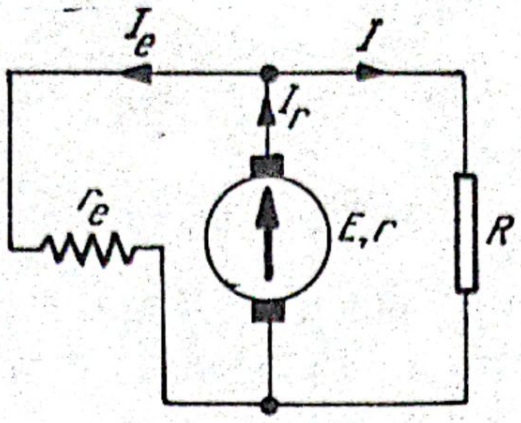
$$P_2 = P(250°C) = 5{,}19 \text{ kW}.$$

c) Din relaţiile $R_1 = \rho_1 \dfrac{l_1}{S}$ şi $m = \gamma l_1 S$ se obţine

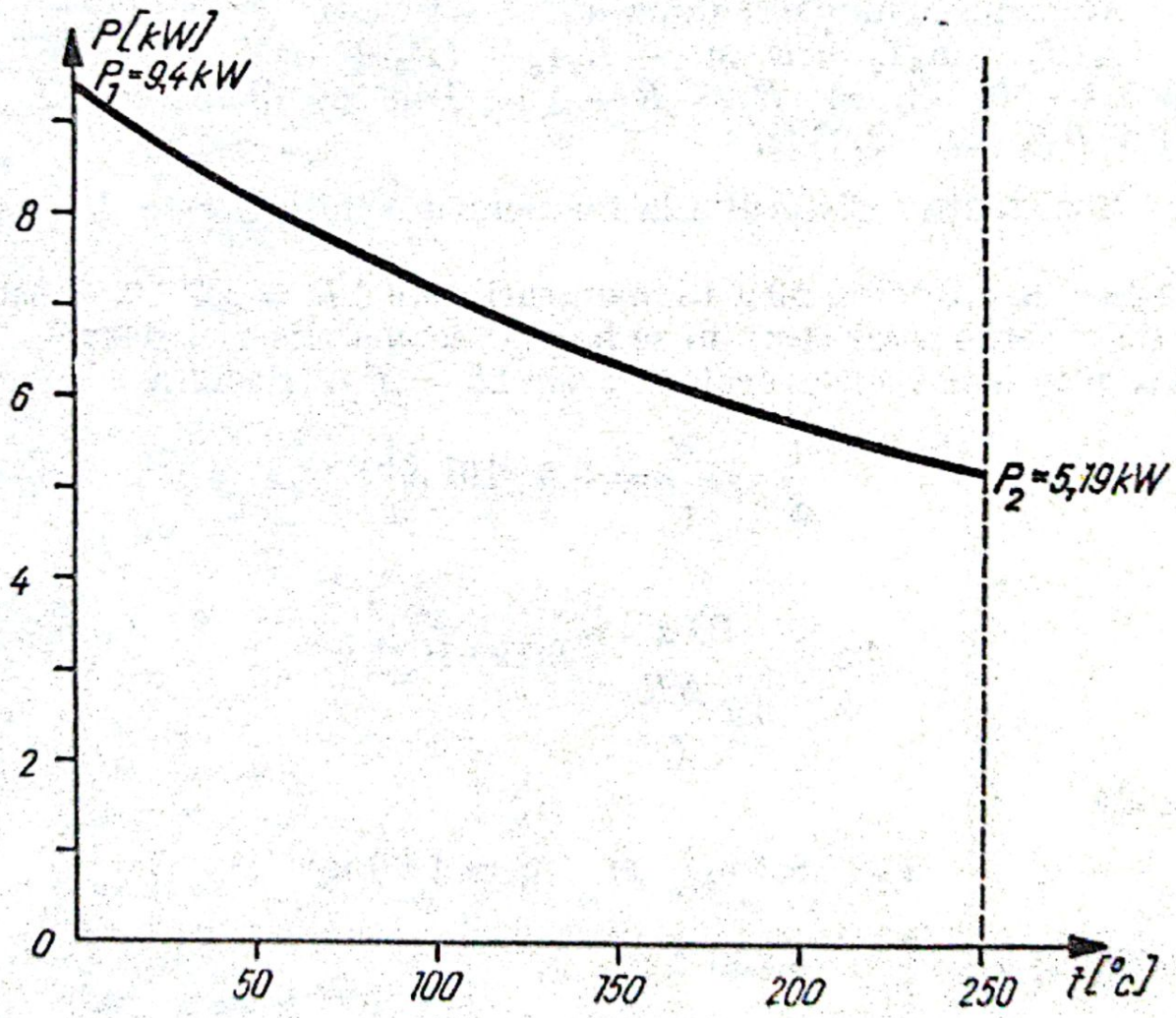
$$l_1 = \sqrt{\frac{mR_1}{\rho_1 \gamma}} = 4{,}84 \text{ m}.$$

d) $Q = m[(c(t_2 - t_1) + L] = 5{,}5 \cdot 10^6$ J.

Scanned with OKEN Scanner



a



b

Fig. 6.36. R. (*a*,*b*)

Scanned with OKEN Scanner

6.37. a) Ansamblul de rezistoare legat la bornele bateriei are rezistența echivalentă R, astfel încît se obține schema echivalentă din fig. 6.37. R. Puterea dată la borne de baterie este $P_b = RI_1^2 = \dfrac{RE^2}{(R + r_i)^2}$ și are valoarea maximă cînd $\dfrac{dP_b}{dR} = 0$, de unde se obține $R = r_i = 1{,}1\ \Omega$.

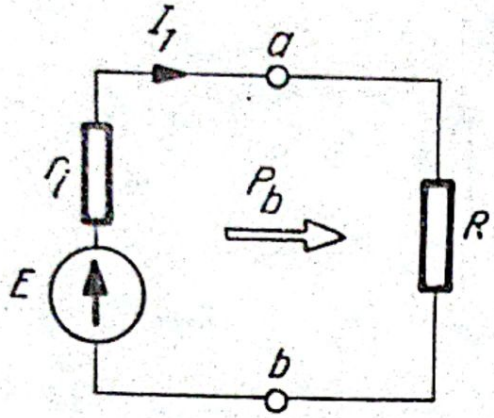


Fig. 6.37. R.

b) Intensitățile curenților din laturile rețelei sînt $I_1 = \dfrac{E}{R + r_i} = 10$ A, $I_2 = \sqrt{\dfrac{P}{R}} = 5$ A, $I_3 = I_1 - I_2 = 5$ A.

c) Aplicînd teorema a doua a lui Kirchhoff se obțin ecuațiile $(R_1 + r_i)\, I_1 + R_3 I_3 = E$ și $-R_3 I_3 + (R_2 + R)\, I_2 = 0$, de unde $R_1 = 1{,}1 - 0{,}5\, R_3$ și $R_2 = R_3 - 1{,}1$. Din condițiile $R_1,\ R_2 \geqslant 0$ rezultă $R_3 \in [1{,}1\ ;\ 2{,}2]\ \Omega$.

d) Rezistența rezistorului la temperatura inițială este $R = \rho \dfrac{l}{S}$, variația ei la creșterea $\Delta\theta$ a temperaturii este $\Delta R = \alpha R \Delta\theta$. Creșterea energiei interne a rezistorului se face pe seama energiei dezvoltate în acesta prin efect electrocaloric: $mc\Delta\theta = P\,t$. Rezultă

$$\frac{l}{S} = \frac{R}{\rho} = 5{,}5 \cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}}$$

și

$$lS = \frac{Pt\alpha}{cd\dfrac{\Delta R}{R}} = 6{,}19 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3},$$

de unde

$$l = 58{,}3\ \mathrm{m} \quad \text{și} \quad S = 1{,}06\ \mathrm{mm^2}.$$

6.38. a) $I = \dfrac{m}{kt} = 6{,}733$ A;

b) $H = \dfrac{NI}{l} = 6\,733\ \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $\varphi_f = BS = \mu_0 H \frac{\pi D^2}{4} = 24 \cdot 10^{-6}$ Wb;

d) $(R_1 + R_2 + R_3 + R_i) I = E \Rightarrow R_3 = 5{,}82\ \Omega$;

e) $\eta = \frac{P_u}{P_c} = \frac{UI}{EI} = \frac{E - R_i I}{E} = 83\%$.

6.39. a, b). Tensiunea la mers în gol este egală cu t.e.m. a bateriei $U_0 = E = 6E_1 = 12$ V. Rezistența echivalentă totală a circuitului este $R = 6r + R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 8\ \Omega$, rezultă intensitatea curentului bateriei $I_1 = \frac{E}{R} = 1{,}5$ A și tensiunea la bornele acesteia, cînd este conectată în circuit, $U = E - 6rI_1 = 10{,}65$ V.

c) $I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} I_1 = 0{,}45$ A, $I_3 = I_1 - I_2 = 1{,}05$ A;

d) $Q = R_2 I_2^2 t = 170{,}1$ J;

e) $H = \frac{NI_3}{l} = 1\,575$ A/m;

f) $\varphi = BS = \mu_0 H \frac{\pi D^2}{4} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Wb.

6.40. a) $I = \frac{nE_1}{R_1 + R_2 + nR_1} = 3$ A;

b) $H = \frac{NI}{l_1} = 6\,000 \frac{\text{A}}{\text{m}}$;

c) $\varphi = BS = \mu_0 H \cdot \pi R^2 = 21{,}3 \cdot 10^{-6}$ Wb;

d) $l_2 = \frac{R_1 s}{\rho} = 44{,}9$ m;

e) $mc\Delta\theta = R_1 I^2 t \Rightarrow \Delta\theta = 23{,}6°\text{C}$.

Scanned with OKEN Scanner

6.41. a) Debitul de volum al pompei este $D_v = 9{,}33 \cdot 10^{-4}$ m³/s, debitul de masă $D_m = \rho D_v = 0{,}933$ kg/s, puterea utilă $P_u = D_m gh = 68{,}6$ W;

b) randamentul pompei este $\eta_p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$, puterea motorului rezultă $P_m = \frac{P_u}{\eta_p} = 76{,}2$ W;

c) $U = E + RI$, $P_m = EI \Rightarrow E = 95{,}25$ V, $R = 18{,}43\ \Omega$;

d) $Q = RI^2 t = 3\,539$ J.

e) Cînd rotorul este blocat, tensiunea contraelectromotoare indusă în acesta este nulă, intensitatea curentului devine $I' = \frac{U}{R}$ și căldura dezvoltată în înfășurarea rotorică este $Q' = \frac{U^2}{R} \cdot t = 197$ kJ.

f) Randamentul instalației este $\eta = \frac{P_u}{P_c} = \frac{P_u}{UI} = 78\%$;

se verifică $\eta = \eta_m \cdot \eta_p$, unde $\eta_m = \frac{P_m}{P_c} = \frac{E}{U} = 0{,}866\%$ este randamentul motorului.

6.42. 1) Cînd intensitatea curentului măsurat este $I = 1$ A, intensitatea curentului prin miliampermetru este $I_A = 10$ mA,

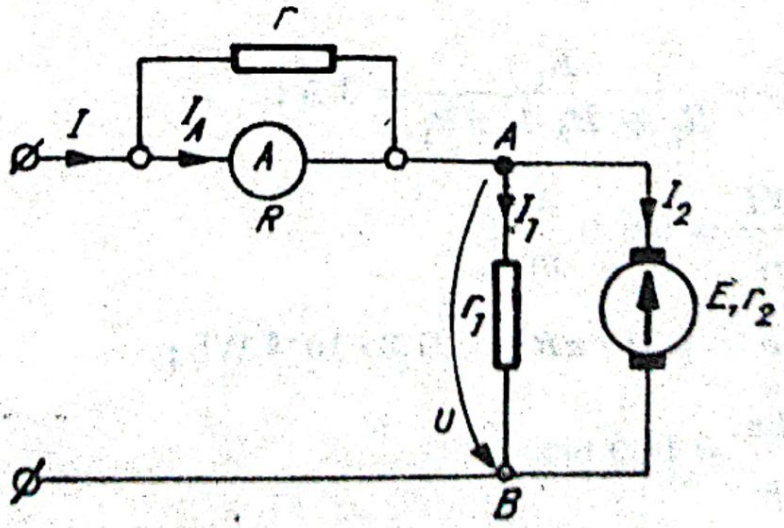


Fig. 6.42. R.

rezistența șuntului rezultă $r = \dfrac{R}{\dfrac{I}{I_A} - 1} = 1{,}01\ \Omega$. Sensibilitatea aparatului cu șuntul montat este $S = 100$ div/A.

2) Montajul este reprezentat în fig. 6.42. R.

a) Cînd motorul este blocat, tensiunea contraelectromotoare a motorului este nulă. Intensitatea curentului din circuitul principal, corespunzătoare deviației $\alpha_a = 200$ diviziuni este $I_a = \dfrac{\alpha_a}{S} = 2$ A.

Rezultă $I_{1a} = \dfrac{r_2}{r_1 + r_2} I_a = 0{,}33$ A

și $I_{2a} = I_a - I_{1a} = 1{,}66$ A.

b) $I_b = I_{1b} + I_{2b} = \dfrac{U}{r_1} + \dfrac{U - E}{r_2} = 3$ A, $\alpha_b = SI_b = 300$ div.

6.43. a) $R_1 R_3 = R_2 R_4 \Rightarrow R_4 = 1\ \Omega$;

b) $I_4 = \dfrac{m}{k \cdot t} = 5$ A;

c) lungimea solenoidului $l = N \cdot d$, intensitatea curentului prin înfășurare $I_3 = I_4$ (la echilibrul punții) $\Rightarrow B = \mu_0 \dfrac{N I_3}{l} = \mu_0 \dfrac{I_3}{d} =$ $= 6{,}28 \cdot 10^{-3}$ T.

d) Vasul calorimetric preia 20% din căldura degajată în rezistorul R_2, deci $K(\theta_f - \theta_0) = 0{,}2 \cdot R_2 I_2^2 t$. Tensiunea la bornele punții este $U = (R_3 + R_4) I_4 = 15$ V, intensitatea curentului prin rezistoarele R_1 și R_2 este $I_2 = \dfrac{U}{R_1 + R_2} = 2{,}5$ A. Capacitatea calorică a vasului calorimetric rezultă $K = 100$ J/grd.

e) Volumul V ocupat de aer în vasul calorimetric și presiunea sa p rămîn constante în timpul încălzirii sistemului de la temperatura inițială $T_1 = 283$°K la temperatura de fierbere a apei $T_2 = 373$°K. Presupunînd aerul din calorimetru un gaz perfect, pentru starea inițială și pentru cea finală se pot scrie relațiile $pV = \dfrac{m_1}{M} RT_1$ și

Scanned with OKEN Scanner

$pV = \frac{m_2}{M} RT_2$, de unde rezultă procentul din masa aerului care părăsește vasul în timpul încălzirii : $\frac{m_1 - m_2}{m_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 24{,}1\%$.

6.44. a) $t = \frac{s}{v} = 100$ s;

b) puterea mecanică a motorului $P_m = F_f \cdot v = \mu mgv = 6$ kW;

c) se consideră puterea electrică a motorului egală cu cea mecanică ($\eta = 1$), rezultă $I = \frac{P_e}{U} = 12$ A.

6.45. a) $L_u = mgh = 8 \cdot 10^5$ J, $P_u = \frac{L_u}{t} = 10^4$ W;

b) $I = \frac{P_c}{U} = 24$ A;

c) $\eta = \frac{P_u}{P_c} = 83{,}3\%$;

d) $P_j = rI^2 = 1\,728$ W.

6.46. a) $\frac{(m_1 + 20\, m_2)\, v^2}{2} = \eta \cdot 2UIt \Rightarrow v = 24$ m/s;

b) $v_{max} = \frac{P_m}{F} = \frac{\eta \cdot 2UI}{(m_1 + 20\, m_2)\, g\, (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = 40$ m/s.

6.47. a) Fluxul magnetic ce traversează inițial spira este $\varphi_i = B \cdot S = \mu_0 H \frac{\pi D_1^2}{4} = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Wb, sarcina indusă în spiră este (v. problema 4.5.16) $q = -\frac{\Delta\varphi}{R} = \frac{\varphi_i}{R} = 6{,}28 \cdot 10^{-7}$ C;

b) capacitatea condensatorului este $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\pi D_2^2}{4}}{d}$, tensiunea la bornele acestuia $U = Ed$, sarcina electrică de pe armătură

Scanned with OKEN Scanner

$$Q = C\,U = \frac{\pi}{4}\varepsilon_0\varepsilon_r D_2^2 E = 6{,}95 \cdot 10^{-9}\ \text{C}.$$

Rezultă $\frac{q}{Q} = 90{,}4$.

6.48. a) $e = lvB = 6\ \text{V}$;

b) $I = \frac{e}{r + r_{MN}} = 30\ \text{A}$;

c) $F = IlB = 18\ \text{N}$;

d) $P_m = Fv = 180\ \text{W}$;

e) $P_R = (r + r_{MN})I^2 = 180\ \text{W}$, $P_R = P_m$.

6.49. a) La funcţionarea pe modul fundamental, lungimea l a antenei verticale este un sfert din lungimea de undă. Rezultă $\lambda = 4l = 120$ m şi frecvenţa $\nu = \frac{c}{\lambda} = 2{,}5$ MHz. Din condiţia de rezonanţă a circuitului acordat $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, se obţine $L = 4{,}05 \cdot 10^{-5}$H.

b) $K\Delta\theta = RI^2t \Rightarrow t = 1{,}2$ s;

c) $\Delta\lambda = 4\Delta l = 4l\alpha\Delta\theta = 0{,}12$ m;

d) $E = \frac{U}{l} = \frac{RI}{l} = 33{,}3$ V/m.

e) Cînd curentul este îndreptat de sus în jos, cîmpul magnetic produs de antenă este opus cîmpului magnetic terestru în punctele situate spre est (fig. 6.49. R), în cazul contrar în punctele situate spre vest. Cîmpul magnetic rezultant este nul cînd $H_a = H_0$, adică $\frac{I}{2\pi r} = H_0$.

Rezultă $r = 0{,}995$ m.

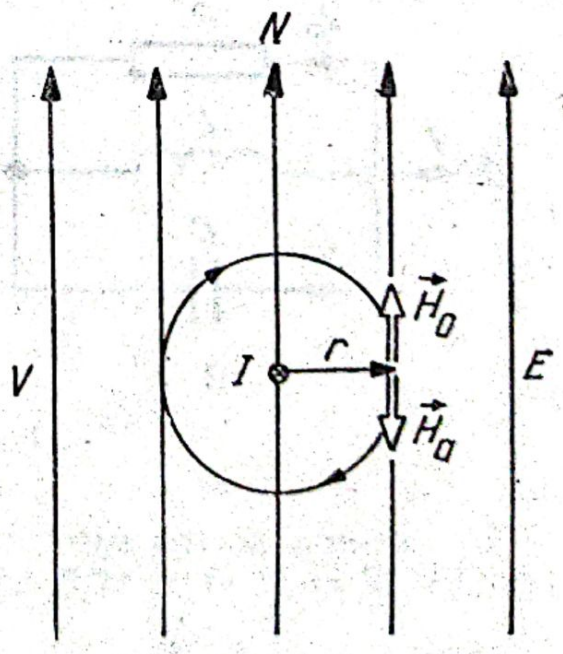


Fig. 6.49. R.

Scanned with OKEN Scanner

6.50. a) $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = 5\ \Omega$;

b) $I = \dfrac{U}{Z} = 44\ \text{A}$;

c) $P = UI\cos\varphi = RI^2 = 5\,808\ \text{W}$;

d) $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = 4\ \Omega$;

$Z' = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R = 3\ \Omega$, $I' = \dfrac{U}{Z'} = 73{,}3\ \text{A}$,

$P' = UI' = 16\,126\ \text{W}$, $P' - P = 10\,318\ \text{W}$.

6.51. În fig. 6.51. R, a este reprezentată schema circuitului, iar în figura 6.51. R, b — diagrama vectorială.

a) Valoarea efectivă a intensității curentului prin rezistor este $I_R = I\cos\varphi = 1{,}73\ \text{A}$. Rezistența rezultă $R = \dfrac{U}{I_R} = 23{,}1\ \Omega$. Din relațiile $I_C - I_L = I|\sin\varphi|$, $I_L = \dfrac{U}{X_L}$, $I_C = \dfrac{U}{X_C}$, $\dfrac{I_L}{I_C} = \dfrac{X_C}{X_L} = \dfrac{1}{2}$ se obțin $I_L = 1\ \text{A}$ și $I_C = 2\ \text{A}$, de unde $X_L = 40\ \Omega$ și $X_C = 20\ \Omega$.

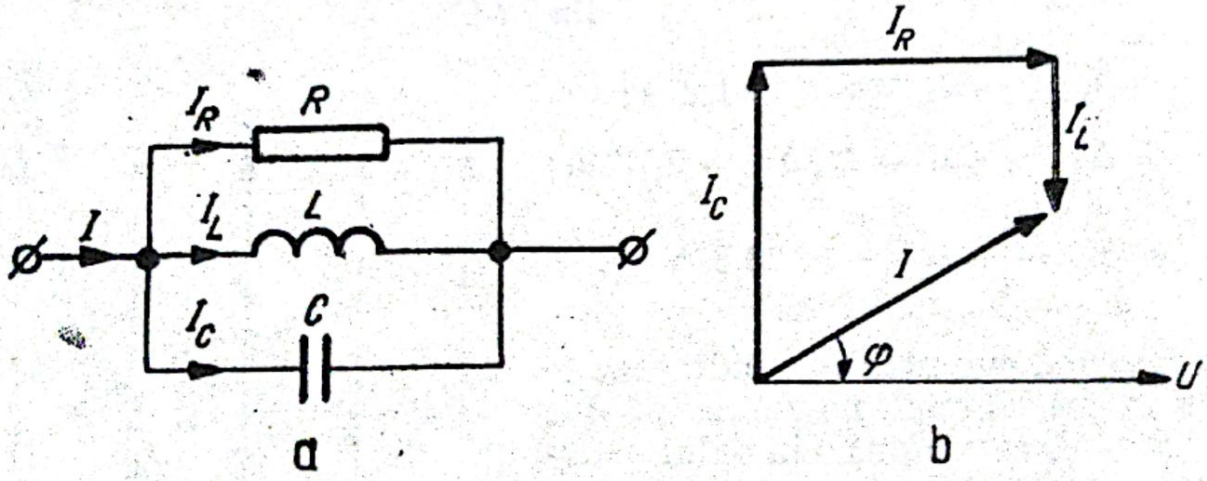


Fig. 6.51. R. (*a*,*b*)

b) Puterea activă este $P = UI\cos\varphi = UI_R = 69{,}4\ \text{W}$, energia rezultă $W = P \cdot t = 17{,}3\ \text{kWh}$, iar costul $c = 5{,}20$ lei.

6.52. a) $\text{tg}\varphi = \dfrac{X_L}{R}$;

Scanned with OKEN Scanner

$X_L = \omega L,\ \omega = 2\pi\nu \Rightarrow L = \frac{R\ \mathrm{tg}\varphi}{2\pi\nu} = 0{,}159\ \mathrm{H};$

b) $X_C = X_L,\ X_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_L} = 63{,}7\ \mu\mathrm{F};$

c) $\mathrm{tg}\varphi_1 = \frac{X_L' - X_C'}{R},\ \mathrm{tg}\ \varphi_2 = \frac{X_L'}{R} \Rightarrow X_C' = R\ (\mathrm{tg}\varphi_2 - \mathrm{tg}\varphi_1) =$

$= 67{,}8\ \Omega,$

$C' = \frac{1}{\omega X_C'} = 46{,}9\ \mu\mathrm{F}.$

6.53. a) $C = \frac{\varepsilon S}{d} \Rightarrow \varepsilon = \frac{d \cdot C}{S} = 87{,}6 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m},\ \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 9{,}9;$

b) $q = CU_c = 3{,}05 \cdot 10^{-6}\mathrm{C};$

c) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1{,}57 \cdot 10^5\ \mathrm{rad/s},\ \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 25\ \mathrm{kHz};$

d) $\omega = 2\pi\nu = 4\pi \cdot 10^4\ \mathrm{rad/s},\ X_L = \omega L = 400\ \Omega,\ X_C = \frac{1}{\omega C} =$

$= 625\ \Omega,\ Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 225\sqrt{2}\ \Omega.$ Valoarea efectivă a tensiunii este $U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ şi a curentului $I = \frac{U}{Z} = 0{,}01$ A. Defazajul φ al curentului în urma tensiunii rezultă din relaţia $\mathrm{tg}\ \varphi =$

$= \frac{X_L - X_C}{R} = -1.$ Se obţine $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, curentul este defazat înaintea tensiunii.

6.54. a) Valoarea efectivă a tensiunii la bornele rezistorului este $U_R = R_1 I = R_1 \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$ şi are valoarea maximă la rezonanţă, pentru $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Rezultă $C_1 = \frac{1}{\omega_1^2 L}$ şi $C_2 = \frac{1}{\omega_2^2 L}$,

Scanned with OKEN Scanner

unde $\omega_1 = 2\pi f_1$ şi $\omega_2 = 2\pi f_2$. Pe de altă parte, $C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_1}$ şi $C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_1 + \Delta d}$; astfel încît se poate scrie $\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1 + \Delta d}{d_1} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2$.

Se obţine $d_1 = \frac{f_1^2}{f_2^2 - f_1^2}\Delta d$ şi urmează

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{\Delta d} \cdot \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_1^2} = 204{,}6 \text{ pF},$$

$$C_2 = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 C_1 = 100{,}25 \text{ pF}.$$

b) $d_1 = \frac{f_1^2}{f_2^2 - f_1^2}\Delta d = 1{,}73$ mm;

c) $L = \frac{1}{\omega_1^2 C_1} = 0{,}101$ H;

d) $U_1 = U_3 = U_R(\omega_1, C_1) = U_R(\omega_2, C_2) = R_1 \frac{U}{R_2}$, $U_2 = U_R(\omega_2, C_1) = R_1 \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C_1}\right)^2}}$, $\frac{U_1^2}{U_2^2} = \frac{R_2^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2}{R_2^2}$

$\Rightarrow R_2 = \frac{U_2}{U_1^2 - U_2^2}\left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C_1}\right) \approx 54\ \Omega$;

e) $L = \mu \frac{N^2}{l} S$, $\mu = \mu_0 \mu_r \Rightarrow \mu_r = \frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} = 19{,}24$.

6.55. a) Din relaţia lui Einstein pentru efectul fotoelectric rezultă $h\nu = W_e + \frac{mv_0^2}{2}$. Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei electronului

Scanned with OKEN Scanner

sînt $x = v_0 t$, $y = \frac{at^2}{2}$, unde accelerația a este determinată de forța electrică ce acționează asupra sa $a = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{md}$. Din condiția ca

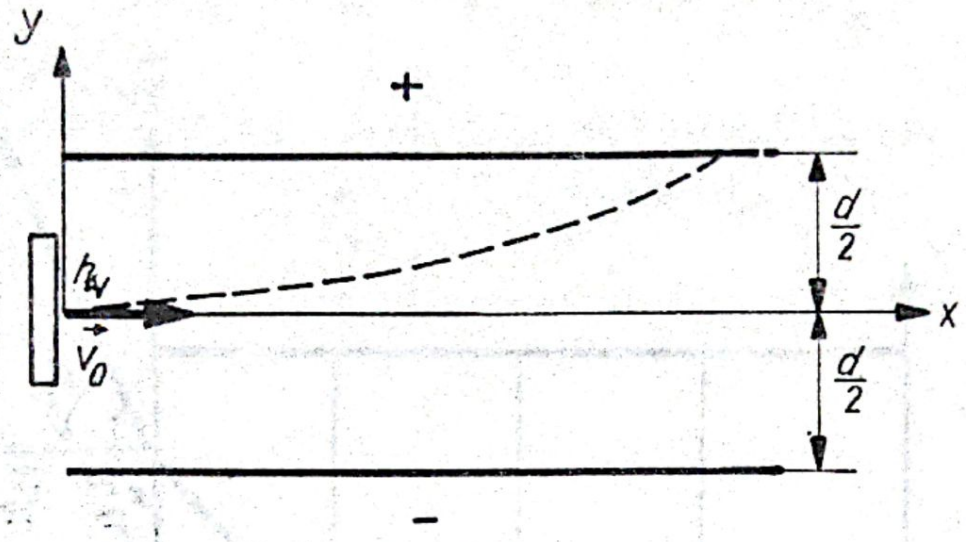


Fig. 6.55. R.

punctul de coordonate $x_0 = 5$ cm, $y_0 = 1$ cm să se afle pe traiectorie, rezultă succesiv

$$v_0^2 = \frac{x_0^2 \cdot a}{2y_0} = \frac{x_0^2 eU}{2y_0 md}$$

și

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{W_e + \frac{x_0^2 eU}{4y_0 d}} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\left(2{,}5 + \frac{25 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}\right)} =$$

$$= 1{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

b) $y = \frac{d}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{d}{a}} = d\sqrt{\frac{m}{eU}} = 1{,}25 \cdot 10^{-7}$ s.

6.56. a) Mișcarea electronului se desfășoară conform relațiilor: $x = v_{0x} t$, $y = v_{0y} t + \frac{at^2}{2}$, componentele vitezei la un moment dat

Scanned with OKEN Scanner

fiind $v_x = v_{0x}$, $v_y = v_{0y} + at$. Accelerația mișcării este $a = \frac{eE}{m}$. La ieșirea din condensator $x = l$ și componentele vitezei finale rezultă $v_{fx} = v_{0x}$, $v_{fy} = v_{0y} + a\frac{l}{v_{0x}}$.

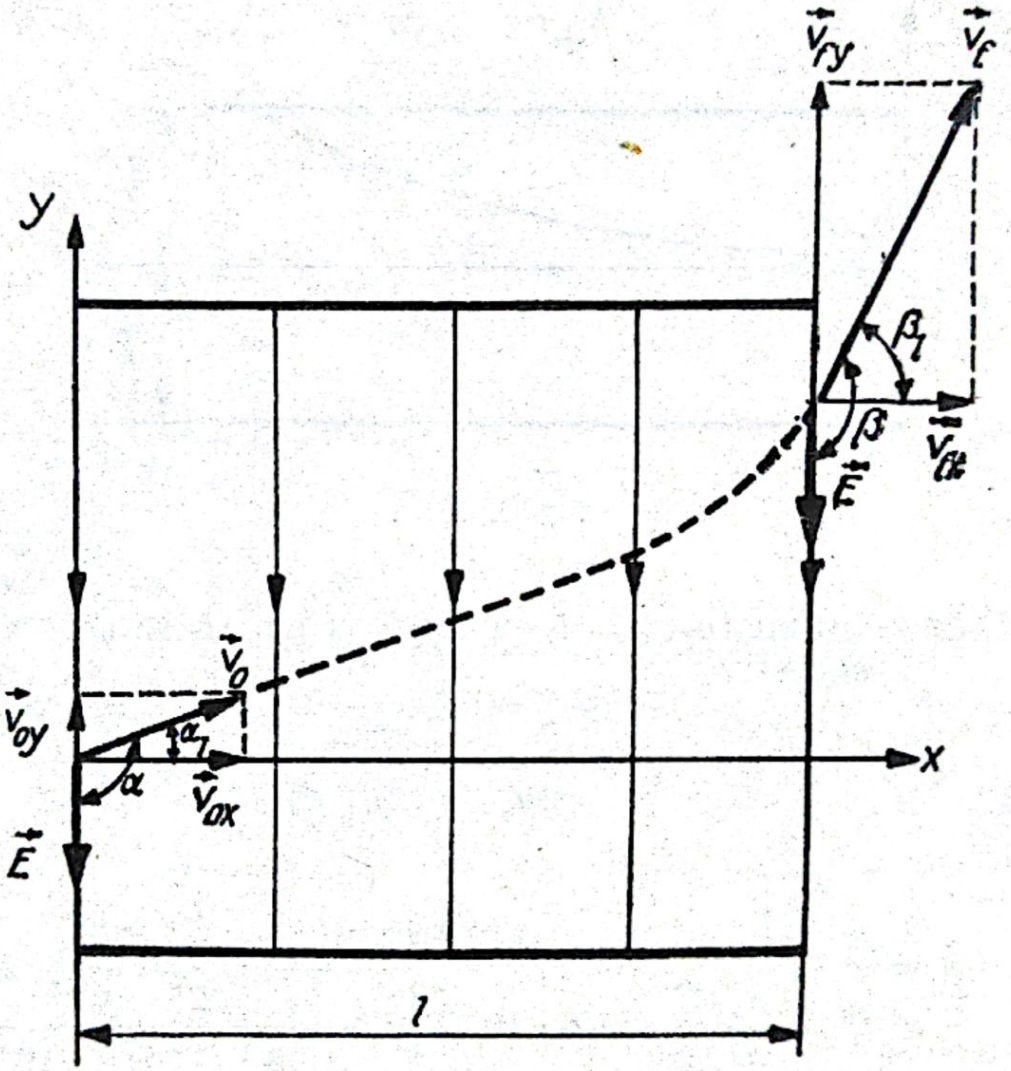


Fig. 6.56. R.

Deoarece $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_1$, $\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \operatorname{tg} \alpha_1$, $\frac{v_{fy}}{v_{fx}} = \operatorname{tg} \beta_1$,

se obține

$$v_0^2 = \frac{al}{\cos^2 \alpha_1 (\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_1)}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi energia cinetică iniţială

$$E_c = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{eEl}{2\cos^2\alpha_1(\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_1)} = 2 \cdot 10^{-15}\ \text{J}.$$

b) $p_0V = nRT_1$, $n\mathcal{C}_v(T_2 - T_1) = NE_c \Rightarrow N = \frac{p_0V\mathcal{C}_v}{RE_c}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) =$
$= 1{,}5 \cdot 10^{19}$.

c) $p_0V = nRT_2$, $p_1V = n_1RT_3$, $p_2V = n_2RT_3$, $p_1 - p_2 = \Delta p$,
$n_1 + n_2 = n \Rightarrow p_2 = p_0\frac{T_3}{T_2} - \frac{\Delta p}{2} = 5 \cdot 10^4\ \text{N/m}^2$.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

1. **Introducere** 7

2. **Electrostatica** 13

Breviar 13

2.1. Legea lui Coulomb. Intensitatea cîmpului electric. Potenţialul electrostatic 18
2.2. Capacitatea condensatoarelor 21
2.3. Lucrul mecanic în cîmp electric. Energia electrostatică 23
2.4. Reţele de condensatoare. Capacităţi echivalente 24
2.5. Mişcarea în cîmp electric a corpurilor încărcate 31

3. **Circuite electrice de curent continuu** 35

Breviar 35

3.1. Intensitatea curentului electric. Densitatea curentului electric. Electroliza 41
3.2. Legea lui Ohm. Rezistenţa electrică 42
3.3. Teoremele lui Kirchhoff 46
3.4. Circuite electrice echivalente 54
3.5. Puteri şi energii 65
3.6. Probleme diverse 69

4. **Electromagnetism** 78

Breviar 78

4.1. Cîmpul magnetic al conductoarelor parcurse de curent electric . . . 87
4.2. Fluxuri. Inductivităţi 92
4.3. Forţe exercitate în cîmp magnetic asupra conductoarelor parcurse de curent 95
4.4. Mişcarea corpurilor încărcate în cîmp magnetic 98
4.5. Inducţia electromagnetică 101
4.6. Mişcarea conductoarelor în cîmp magnetic 105
4.7. Maşini electrice 108

Scanned with OKEN Scanner

5. Circuite în regim sinusoidal 112

Breviar 112

5.1. Mărimi sinusoidale 122
5.2. Adunarea şi derivarea mărimilor sinusoidale 124
5.3. Aplicarea teoremelor lui Kirchhoff în regim sinusoidal 126
5.4. Circuitul dipolar 129
5.5. Elementele de circuit 132
5.6. Circuite serie 134
5.7. Circuite derivaţie 139
5.8. Probleme diverse 141

6. Probleme date la concursurile de admitere în învăţământul superior . . 148

Rezolvări şi răspunsuri 169

Scanned with OKEN Scanner